

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE LAPLACE

AUX ÉQUATIONS

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{1i}(x, y) \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n A_{0i}(x, y) \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0$$

PAR

LOUISE PETRÉN

LICENCIÉ ÈS SCIENCES

THÈSE DE DOCTORAT

QUI AVEC L'AUTORISATION DE LA FACULTÉ DES SCIENCES À LUND SERA PUBLIQUEMENT
SOUTENUE À L'AUDITOIRE VI, DIX HEURES DU MATIN,
LE 3 MAI 1911



LUND 1911
IMPRIMERIE HÅKAN OHLSSON



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553402_0023

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE LAPLACE

AUX ÉQUATIONS

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{ii}(x, y) \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n A_{0i}(x, y) \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0$$

PAR



LOUISE PETRÉN



INTRODUCTION.

Les premiers résultats importants sur l'intégration de l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

où les coefficients a , b , c sont des fonctions de x et de y , sont dus à EULER. EULER ¹⁾ a montré que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) admette une intégrale intermédiaire du premier ordre est que les coefficients a , b , c satisfassent à une des relations

$$(2) \quad \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 0, \quad (3) \quad \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c = 0.$$

Si $\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 0$, l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b \right) \left(\frac{\partial z}{\partial y} + az \right) = 0$$

et l'équation admet l'intégrale $e^{-\int a dy} X$, X étant une fonction arbitraire de x ; de

même si $\frac{\partial b}{\partial y} + ab - c = 0$, l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} + bz \right) = 0$$

et l'équation admet l'intégrale $e^{-\int b dx} Y$, Y étant une fonction arbitraire de y . Dans les deux cas considérés l'intégration de l'équation (1) se ramène à l'intégration successive de deux équations différentielles linéaires du premier ordre, intégration qui n'exige que des quadratures. De plus, EULER nous a donné des exemples d'équations du type (1) dont on peut trouver sous forme explicite une intégrale dépendant d'une fonction arbitraire, sans qu'il existe d'intégrale intermédiaire du premier ordre; les intégrales explicites en question sont de la forme

$$(4) \quad \alpha_0 X^{(m)} + \alpha_1 X^{(m-1)} + \dots + \alpha_{m-1} X' + \alpha_m X$$

ou de la forme

$$(5) \quad \beta_0 Y^{(r)} + \beta_1 Y^{(r-1)} + \dots + \beta_{r-1} Y' + \beta_r Y,$$

¹⁾ EULER Institutiones Calculi Integralis, T. III, Pars prima, Sectio secunda, Cap II.

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_m, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}, \beta_r$ étant des fonctions déterminées de x et de y , $X^{(i)}$ et $Y^{(i)}$ les dérivées d'ordre i de X et de Y respectivement, m et r des nombres déterminés. EULER est le premier qui a donné des intégrales du type considéré, et dans les derniers temps on les a nommées d'après lui: des intégrales de la forme d'Euler¹⁾.

Dans un Mémoire²⁾, présenté à l'Académie des Sciences de Paris 1773, LAPLACE donna une méthode pour reconnaître si l'équation (1) admet une intégrale de la forme (4) ou (5); si l'équation admet une intégrale de la forme (4) ou (5), on obtient cette intégrale par la méthode de Laplace, et l'intégration de l'équation (1) peut être ramenée à l'intégration de deux équations différentielles linéaires du premier ordre. La méthode de Laplace consiste à ramener, par l'application répétée de l'une ou de l'autre de deux transformations, l'intégration de l'équation (1) à l'intégration d'une équation de même type qui admet une intégrale intermédiaire du premier ordre et, par conséquent, est immédiatement intégrable. Les deux transformations de Laplace sont

$$(6) \quad z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az, \quad (7) \quad z_{-1} = \frac{\partial z}{\partial x} + bz.$$

En appliquant la transformation (6), l'équation (1) peut s'écrire

$$(8) \quad \frac{\partial z_1}{\partial x} + bz_1 = hz, \quad h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c.$$

Si $h \neq 0$, l'élimination de z entre les équations (6) et (8) conduit à l'équation

$$(9) \quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + a_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} + c_1 z_1 = 0,$$

$$\text{où l'on a} \quad a_1 = a - \frac{\partial \log h}{\partial y}, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c - \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - b \frac{\partial \log h}{\partial y}.$$

Il résulte des équations (6) et (8) que si l'une des équations (1) et (9) admet une intégrale de la forme d'Euler, il en est de même de l'autre équation; les intégrales des deux équations (1) et (9) se correspondent une à une, de toute intégrale de l'une des équations on obtient sans intégration une solution de l'autre équation. Si l'équation (1) admet l'intégrale

$$z = \alpha_0 X^{(m)} + \alpha_1 X^{(m-1)} + \dots + \alpha_{m-1} X' + \alpha_m X,$$

l'équation (9) admet une intégrale de même type, laquelle renferme les dérivées de X d'ordre $m-1$ au plus parce que $\frac{\partial \alpha_0}{\partial y} + a\alpha_0 = 0$. Il en résulte que si l'équation (1) admet une intégrale de la forme (4), on est conduit, par l'application de la transformation (6) m fois au plus, à une équation qui est de même type que l'équation (1) et qui admet une intégrale de la forme αX (α étant une fonction

¹⁾ Le Roux est le premier qui a donné le nom d'intégrale de la forme d'Euler aux intégrales qui s'expriment linéairement à l'aide d'une fonction arbitraire d'une variable caractéristique et des dérivées de cette fonction en nombre déterminé. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5^{ème} série, T. IV, 1898, page 401.

²⁾ Oeuvres complètes de Laplace, Tome IX, pages 5—68.

déterminée de x et de y) et dont on obtient l'intégrale générale par l'intégration successive de deux équations différentielles linéaires du premier ordre. Si l'équation (1) admet une intégrale de la forme (5), on peut de la même manière, par l'application de la transformation (7) r fois au plus, ramener l'intégration de l'équation (1) à l'intégration de deux équations différentielles linéaires du premier ordre. Mais si l'équation (1) n'admet pas une solution de la forme (4) ou (5), la méthode de Laplace ne réussit pas.

L'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre

$$(10) \quad A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D \frac{\partial z}{\partial x} + E \frac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0,$$

où A, B, C, D, E, F sont des fonctions de x et de y , peut, si l'équation admet deux systèmes de caractéristiques distincts, être ramenée à une équation du type (1), en effectuant un changement de variables indépendantes. Les caractéristiques de l'équation (10) sont

$$f(x, y) = \text{const.}, \text{ où } A \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + B \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + C \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = 0;$$

on dit aussi que $f(x, y)$ est une variable caractéristique; la condition nécessaire et suffisante pour que les deux systèmes de caractéristiques ne coïncident pas, est $B^2 - 4AC \neq 0$. Si $B^2 - 4AC = 0$, on peut, en faisant un changement de variables indépendantes, ramener l'équation (10) à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

et pour que l'équation (10) admette une intégrale de la forme d'Euler, on doit avoir $b = 0$. Mais pour reconnaître si l'équation (10) est intégrable par la méthode de Laplace, il n'est pas nécessaire de faire un changement de variables indépendantes. LEGENDRE ¹⁾ a donné une méthode, analogue à celle de Laplace, qu'on peut appliquer directement à l'équation (10). Pour que l'équation (10) soit intégrable par la méthode de Laplace (Legendre), il faut et il suffit que l'équation admette une intégrale de la forme d'Euler. L'avantage du procédé de Legendre est qu'il permet de reconnaître si l'équation est intégrable sans effectuer la détermination des caractéristiques. Si l'équation (10) admet une intégrale de la forme d'Euler, on peut, après avoir déterminé les caractéristiques, ramener l'intégration de l'équation à des quadratures; on obtient pour l'intégrale générale une expression dans laquelle une fonction arbitraire figure sous des signes de quadrature qu'il est impossible de faire disparaître, si l'équation n'admet pas deux intégrales de la forme d'Euler.

IMSCHENETSKY ²⁾ a depuis présenté le procédé de Legendre sous une forme très

¹⁾ Histoire de l'Académie des Sciences de Paris, 1787: Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles, § IV, pages 319—323.

²⁾ Grunert's Archiv der Mathematik und Physik, Bd. 54, 1872: Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables, §. 11. Traduit du russe: Mémoire de Kasan 1868.

simple. — IMSCHENETSKY ¹⁾ a aussi donné une extension de la méthode de Laplace à l'équation

$$(11) \quad Gs + Hp + K = 0,$$

G, H, K étant des fonctions de q, z, x, y ; la désignation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q$ étant employée. IMSCHENETSKY applique à l'équation (11) la transformation

$$(12) \quad z_1 = F(q, z, x, y),$$

où $F(q, z, x, y)$ satisfait à l'équation $G \frac{\partial F}{\partial z} = H \frac{\partial F}{\partial q}$. L'équation (11) peut se mettre sous la forme

$$z_1 = F(q, z, x, y), \quad p_1 = \frac{\partial F}{\partial x} - \mu K,$$

la désignation $\mu = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{H} = \frac{\frac{\partial F}{\partial q}}{G}$, $p_1 = \frac{\partial z}{\partial x}$, étant employée. Ecrivons

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \mu K = F_1(q, z, x, y).$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F_1}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (11) admette une intégrale intermédiaire du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire de y . Si

$$\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F_1}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0,$$

on obtient l'intégrale générale de l'équation (11) par l'intégration successive de deux équations différentielles du premier ordre. Si

$$\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F_1}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial F_1}{\partial z} \neq 0,$$

les équations

$$z_1 = F(q, z, x, y), \quad p_1 = F_1(q, z, x, y)$$

peuvent être résolues par rapport à z et à q , et l'on obtient les équations

$$z = f(p_1, z_1, x, y), \quad q = f_1(p_1, z_1, x, y);$$

l'élimination de z entre ces deux équations conduit à l'équation

$$(13) \quad \frac{\partial f}{\partial p_1} s_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} q_1 + \frac{\partial f}{\partial y} - f_1 = 0,$$

la désignation $s_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y}$, $q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y}$ étant employée. Les deux équations (11) et (13) peuvent être intégrées en même temps; de toute solution de l'une des équations on obtient

¹⁾ Même ouvrage, §. 9.

sans intégration une solution de l'autre équation. Comme l'équation (13) est linéaire par rapport à s_1 et à q_1 , il existe toujours une transformation d'Imschenetsky de la forme $u = \varphi(p_1, z_1, x, y)$ qui peut être appliquée à l'équation (13), mais comme cette transformation conduit de nouveau à l'équation proposée, elle est sans intérêt. Pour pouvoir appliquer la transformation (12) d'Imschenetsky à l'équation (13), il faut que l'équation (13) soit linéaire par rapport à s_1 et à p_1 . Ce n'est donc que dans des cas exceptionnels qu'on peut appliquer la transformation (12) d'Imschenetsky plusieurs fois à une équation (11). Supposons que l'équation (13) soit linéaire par rapport à s_1 et à p_1 . Il se peut que l'équation (13) admette une intégrale intermédiaire du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire de y ; sinon on peut appliquer la transformation (12) d'Imschenetsky à l'équation (13). On peut continuer de cette manière, jusqu'à ce qu'on obtienne éventuellement une équation qui admet une intégrale intermédiaire du premier ordre et dont on peut ramener l'intégration à l'intégration de deux équations différentielles du premier ordre, ou qu'on obtienne éventuellement une équation à laquelle on ne peut plus appliquer la transformation (12) d'Imschenetsky. Dans le dernier cas, la méthode d'Imschenetsky ne réussit pas. Ainsi la méthode d'Imschenetsky consiste à ramener — par l'application répétée de la transformation (12) — une équation (11) qui n'admet pas d'intégrale intermédiaire du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire de y à une équation de même type qui admet une intégrale intermédiaire de cette espèce. Lorsque l'équation (11) est de la forme (1), les transformations d'Imschenetsky sont évidemment identiques à celles de Laplace ¹⁾ ²⁾. —

¹⁾ Aussi d'autres équations du type (11) ont été intégrées, antérieurement à Imschenetsky, en appliquant des transformations en effet identiques à celles d'Imschenetsky. Je cite par exemple l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{kz}$, k étant une constante, intégrée par J. Liouville (Voir: GOURSAT, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, T. I, page 97).

²⁾ Il me semble que les transformations d'Imschenetsky méritent d'être examinées de plus près. En effet, si l'équation (11) peut être ramenée par m transformations (12) à une équation qui admet une intégrale intermédiaire du premier ordre, l'on obtient pour l'équation (11) une intégrale de la forme $z = \varphi(x, y, X, X', \dots, X^{(m)})$, où φ est une fonction déterminée des arguments, et il existe une équation de la forme

$$\Phi\left(\frac{\partial^{m+1} z}{\partial y^{m+1}}, \frac{\partial^m z}{\partial y^m}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right) = Y$$

qui forme un système en involution avec l'équation (11). Et si l'équation (11) admet une solution de la forme $z = \varphi(x, y, X, X', \dots, X^{(m)})$, on obtient, en appliquant la transformation (12) m fois au plus, une équation qui admet une intégrale intermédiaire du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire de y . Il en suit que, par la méthode d'Imschenetsky, l'intégration de l'équation (11) peut être ramenée à l'intégration de deux équations différentielles du premier ordre, pourvu que l'équation (11) admette une intégrale de la forme $z = \varphi(x, y, X, X', \dots, X^{(m)})$. Si l'équation (11) n'admet pas d'intégrale de la forme $z = \varphi(x, y, X, X', \dots, X^{(m)})$, la méthode ne réussit pas. Il serait intéressant d'examiner quelle forme l'équation (11) prend pour admettre une solution de la forme $z = \varphi(x, y, X, X', \dots, X^{(m)})$, autrement dit à quelles conditions G, H, K doivent satisfaire pour que l'équation (11) puisse être ramenée par m transformations (12) à une équation qui admet une intégrale intermédiaire du premier ordre. — Les transformations d'Imschenetsky sont très peu mentionnées dans la littérature. GOURSAT (Leçons, T. II, page 263) en parle, il est vrai, mais sans motiver leur emploi et sans indiquer leur rapport à la méthode de Laplace. FORSYTH (Theory of

TEIXEIRA ¹⁾ a depuis essayé d'étendre la méthode d'Imshenetsky à l'équation

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D = 0,$$

où A, B, C, D sont des fonctions de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y$.

MOUTARD a traité un problème qui a beaucoup de rapport à la méthode de Laplace. Dans un Mémoire, présenté à l'Académie des Sciences de Paris 1870 ²⁾, MOUTARD a examiné quelles sont les équations de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right)$$

pour lesquelles l'intégrale générale est de la forme

$$z = F(x, y, X, X', \dots, X^{(m)}, Y, Y', \dots, Y^{(r)}),$$

où F est une fonction déterminée des arguments. Dans ce Mémoire MOUTARD a montré que les seules équations de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right),$$

susceptibles d'admettre une intégrale générale de cette espèce et qui ne sont réductibles par un changement de variables ni à l'équation (1), ni à l'équation de J. Liouville $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^z$, sont toutes — à l'exception de deux cas très simples — réductibles à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(Ae^z) - \frac{\partial}{\partial y}(Be^{-z}),$$

où A et B sont des fonctions de x et de y , assujetties elles-mêmes à vérifier certaines conditions (Le théorème de Moutard). L'intégration de la dernière équation est ramenée à dépendre uniquement de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + ABz,$$

laquelle est de la forme (1). Ainsi le problème est réduit à l'équation (1). Ensuite MOUTARD a montré comment on peut construire l'équation la plus générale de la

Differential Equations, Part IV) ne les mentionne pas du tout. J. HAGEN (Synopsis der hoeheren Mathematik, Bd III, page 425) écrit quant à la transformation d'Imshenetsky appliquée à l'équation (11): »Seine Substitution erfordert eine Quadratur. In den neuen Veränderlichen nimmt die Gleichung wieder die Gestalt der ursprünglichen Gleichung an. Die Substitution kann daher wiederholt werden, bis man auf eine Gleichung stösst, welche die Integrationsbedingen erfüllt«. Tous les points sont faux.

¹⁾ Comptes Rendus, T. XCIII, 1881, page 702. Bulletin de l'Académie de Belgique, 3^{ème} série, T. III 1882, pages 486—498.

²⁾ Voir Comptes Rendus, T. LXX, 1870, pages 1068—1070.

forme (1) pour laquelle l'intégrale générale est de l'espèce considérée. Mais le Mémoire original de Moutard a disparu en 1871, et ce n'est que l'Introduction ¹⁾, dans laquelle le contenu est indiqué et où les résultats nommés ci-dessus sont exposés (quoique non démontrés ²⁾), et la troisième Partie ³⁾ relative à l'équation spéciale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cz = 0$$

qui ont été publiées.

Plus tard DARBOUX a repris l'étude de la méthode de Laplace appliquée à l'équation (1). Dans ses études très belles et très complètes, DARBOUX ⁴⁾ a notablement perfectionné et simplifié la méthode. Aujourd'hui la méthode de Laplace est ordinairement reproduite d'après DARBOUX ⁵⁾. C'est aussi des notations de Darboux que je me suis servi.

DARBOUX a montré la propriété d'invariants des fonctions

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \quad k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c.$$

Les fonctions h et k ne changent pas, si l'on effectue la substitution $z = \lambda z$, λ étant une fonction quelconque de x et de y . Et si l'on fait le changement de variables $x = \varphi(x)$, $y = \psi(y)$, les fonctions h et k ne subissent pas d'autre changement qu'une multiplication par le facteur $\varphi'(x)\psi'(y)$. En appliquant les transformations de Laplace à l'équation (1), les invariants des équations transformées ne dépendent que des invariants h et k . Les invariants h_1 et k_1 de l'équation (9) sont

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y}, \quad k_1 = h;$$

et les invariants h_{-1} et k_{-1} de l'équation en z_{-1} sont

$$h_{-1} = 2k - h - \frac{\partial^2 \log k}{\partial x \partial y}, \quad k_{-1} = k.$$

Ainsi pour reconnaître si l'équation (1) est intégrable par la méthode de Laplace, il n'est pas nécessaire de former les deux séries d'équations qu'on obtient par l'application répétée des transformations de Laplace à l'équation (1); on peut au lieu de cela calculer de proche en proche les invariants des équations

¹⁾ Comptes Rendus, T. LXX, 1870, pages 834—838. Imprimée depuis dans le Journal de l'Ecole Polytechnique, Cahier 56, 1886, pages 1—5.

²⁾ Le théorème de Moutard a été depuis démontré par Cosserat dans: DARBOUX, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Partie IV, pages 405—422. Voir aussi: FORSYTH, Theory of Differential Equations, Part IV, Ch. XV. — Le théorème de Moutard peut aussi être démontré à l'aide des transformations d'Imshenetsky.

³⁾ Journal de l'Ecole Polytechnique, Cahier 45, 1878, pages 1—11.

⁴⁾ DARBOUX, Leçons sur la théorie générale des surfaces. Partie II. Livre IV. Ch. II—IX pages 23—218.

⁵⁾ Voir: GOURSAT, Leçons. T. II, pages 1—39.

FORSYTH, Theory of Differential Equations. Part IV. Vol. VI. pages 39—158.

$$h_1, h_2, h_3, \dots, k_{-1}, k_{-2}, k_{-3}, \dots$$

en partant des invariants h et k et en employant les formules de récurrence :

$$\begin{cases} h_{i+1} + h_{i-1} = 2h_i - \frac{\partial^2 \log h_i}{\partial x \partial y}, & (i \geq 0) \\ k_{i+1} = h_i \end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) soit intégrable par la méthode de Laplace est que, dans ces séries d'invariants, il y ait un invariant qui est nul. L'équation (1) admet une intégrale de la forme (4), si $h_m = 0$, et une intégrale de la forme (5), si $k_{-r} = 0$.

DARBOUX a fait avec succès des études approfondies sur les équations (1) dont la méthode de Laplace fournit l'intégrale générale. Il a donné la forme générale des équations (1) qui admettent une intégrale de la forme d'Euler et des équations (1) qui admettent une intégrale du type (4) et une intégrale du type (5). Ce dernier problème avait déjà été résolu par MOUTARD, mais, comme je l'ai dit, son manuscrit ayant été détruit, on ne sait comment il a résolu le problème.

Ensuite DARBOUX a étudié la relation entre les intégrales de l'équation (1) et de l'équation adjointe

$$(14) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(au) - \frac{\partial}{\partial y}(bu) + cu = 0$$

et montré que si l'intégrale générale de l'une des équations (1) et (14) s'obtient par la méthode de Laplace, on peut de cette intégrale directement déduire l'intégrale générale de l'autre équation. — R. LIOUVILLE¹⁾ avait déjà indiqué la propriété remarquable des deux équations (1) et (14), à savoir qu'elles ont les mêmes invariants mais en ordre inverse, et que les deux équations peuvent être intégrées en même temps par la méthode de Laplace; si l'une des équations est ramenée, en appliquant la transformation (6) m fois, à une équation qui admet une intégrale de la forme αX , l'autre équation est ramenée, en appliquant la transformation (7) m fois, à une équation qui admet une intégrale de la forme βY . — Par là j'ai seulement cité quelques-uns des résultats les plus importants qu'a obtenus DARBOUX et qui nous intéressent ici par leur rapport à la méthode de Laplace.

La méthode de Laplace a été très simplifiée par l'emploi de la notation des invariants, mais aussi le calcul des invariants $h_1, h_2, h_3, \dots, k_{-1}, k_{-2}, k_{-3}, \dots$ peut être très compliqué. Pour cela on a essayé de trouver des critères plus simples pour constater que l'équation (1) admet une intégrale de la forme d'Euler. Le critérium qui a la plus grande importance est celui de Goursat.

GOURSAT²⁾ a montré que si l'équation (1) admet $m+2$ intégrales entre lesquelles il n'existe aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants, mais

¹⁾ Journal de l'Ecole Polytechnique, Cahier 56, 1886: Formes intégrables des équations linéaires du second ordre, IV, pages 49—50.

²⁾ American Journal of Mathematics, Vol. XVIII, 1896: Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace, pages 347—364. De même: GOURSAT, Leçons. T. II, Chap. V, pages 21—31.

une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions de x , l'équation (1) admet une solution de la forme

$$\alpha_0 X^{(m)} + \alpha_1 X^{(m-1)} + \dots + \alpha_{m-1} X' + \alpha_m X.$$

Si l'on compare la méthode de Laplace (Legendre) pour intégrer l'équation (10) à la méthode générale de Darboux ¹⁾ pour intégrer l'équation

$$(15) \quad F \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y \right] = 0,$$

appliquée à l'équation (10), l'on trouve que les deux méthodes réussissent en même temps, c'est-à-dire elles donnent l'intégrale générale des équations (10) qui admettent une intégrale de la forme d'Euler ²⁾. En effet, la méthode de Laplace (Legendre) et celle de Darboux, appliquée à l'équation (10), ont toutes deux pour but de trouver une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire, c'est-à-dire de former une équation contenant une fonction arbitraire et telle que toutes les intégrales de l'équation (10) soient aussi des intégrales de cette équation. En d'autres termes, les deux méthodes s'appliquent avec succès à l'équation (10), s'il existe une équation avec une fonction arbitraire qui forme un système en involution avec l'équation proposée pour toutes les formes possibles de la fonction arbitraire ³⁾. La méthode de Laplace mène plus directement au but. Comme la méthode de Darboux donne toutes les intégrales explicites ⁴⁾ dépendant d'une fonction arbitraire, chaque intégrale explicite dépendant d'une fonction arbitraire de l'équation (10) est une intégrale de la forme d'Euler.

Des méthodes qui servent à reconnaître si l'équation (10) est intégrable par la méthode de Laplace (Legendre) sont d'importance non seulement pour l'équation (10) et pour les équations dont l'intégration peut être ramenée à l'intégration d'une équation du type (10), mais aussi pour l'équation générale aux dérivées partielles du second ordre, en tant qu'il s'agit de reconnaître si la méthode de Darboux fournit l'intégrale générale de l'équation (15). DARBOUX ⁴⁾ a montré que si sa méthode fournit l'intégrale générale de l'équation (15), l'équation auxiliaire

¹⁾ Pour la première fois donnée dans Comptes Rendus, T. LXX, 1870, pages 675—678, 746—749; Annales de l'École normale, T. VII, 1870, pages 163—173.

Voir: GOURSAT, Leçons. T. II, Chap. VII.

FORSYTH, Theory of Differential Equations, Part. IV, Ch. XVIII.

²⁾ GOURSAT, Leçons. T. II, Chap. VII, pages 174—182.

³⁾ Une intégrale explicite dépendant d'une fonction arbitraire est de la forme

$$\begin{cases} x = F_1(\alpha, f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(m)}(\alpha), \beta), \\ y = F_2(\alpha, f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(m)}(\alpha), \beta), \\ z = F_3(\alpha, f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(m)}(\alpha), \beta), \end{cases}$$

où f désigne la fonction arbitraire, c'est-à-dire x, y, z s'expriment par des fonctions déterminées de deux variables auxiliaires α, β , d'une fonction arbitraire de α et de ses dérivées en nombre fini.

⁴⁾ DARBOUX, Leçons, Partie IV, Note XI. De même: GOURSAT, Leçons. T. II, Note I, pages 334—336.

$$\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}} \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial z}{\partial x}} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial z}{\partial y}} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} z' = 0,$$

qui est du type (10), z' étant la variable indépendante, est intégrable par la méthode de Laplace (Legendre)¹⁾.

Il est naturel d'essayer d'étendre la méthode de Laplace et les recherches en relation avec celle-ci faites sur l'équation linéaire du second ordre aux équations linéaires d'un ordre supérieur. Deux essais dans ce sens ont déjà été faits.

LE ROUX²⁾ a essayé d'étendre la méthode de Laplace à l'équation linéaire d'ordre n :

$$(16) \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i A_{ij} \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j} = 0,$$

les coefficients A_{ij} étant des fonctions de x et de y . Les caractéristiques de l'équation (16) sont

$$f_i(x, y) = \text{const.}, \text{ où } \frac{\partial f_i}{\partial x} + u_i \frac{\partial f_i}{\partial y} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) étant les n racines de l'équation

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i A_{i, n-i} u^i = 0;$$

on dit aussi que $f_i(x, y)$ est une variable caractéristique. Par un changement de variables indépendantes on peut faire disparaître le terme en $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$. Ainsi on peut, sans diminuer la généralité, supposer $A_{n0} = 0$. x est alors une variable caractéristique et l'équation (16) s'écrit

$$(16') \quad \varphi_p \frac{\partial^p z}{\partial x^p} + \varphi_{p-1} \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x^{p-1}} + \dots + \varphi_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi_0 z = 0,$$

où $\varphi_i = \sum_{j=0}^i A_{ij} \frac{\partial^j}{\partial y^j}$ ($i = 0, 1, \dots, p$); $p \leq n-1$. Si l'équation (16') admet une intégrale de la forme (4), α_0 doit être une intégrale de l'équation $\varphi_p \alpha = 0$. En partant de la supposition que le caractère essentiel de la transformation de Laplace qui correspond à la variable caractéristique x soit qu'elle ramène l'intégrale (4) à une intégrale de même type qui ne contient plus les dérivées de X que jusqu'à l'ordre $m-1$ au plus, LE ROUX considère chaque transformation du type

¹⁾ De cette façon l'on peut souvent trouver quelle forme une équation doit avoir pour être intégrable par la méthode de Darboux. Je cite comme exemple l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(z)$, examinée par Lie [Voir GOURSAT, Leçons. T. II, pages 182—186.]; le problème est résolu beaucoup plus facilement en comparant l'équation à l'équation auxiliaire.

²⁾ Bulletin de la Société Mathématique de France, T. 27, 1899, pages 237—262: Extension de la méthode de Laplace aux équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre supérieur au second.

$$(17) \quad \theta_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{\alpha_0} \right), \text{ où } \varphi_p \alpha_0 = 0,$$

comme une transformation de Laplace à l'équation (16'), les transformations (17) étant les plus simples qui puissent avoir le caractère essentiel en question. LE ROUX considère aussi la transformation complètement déterminée

$$(18) \quad \theta = \varphi_p z$$

comme une transformation de Laplace correspondant à la variable caractéristique x , parce que la transformation (18) est composée de transformations du type (17). — Lorsque $A_{pj} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n - p$), la transformation (18) est réduite à $\theta = A_{p0} z$, et l'équation (16') n'admet pas d'intégrale du type (4). — LE ROUX forme de la même manière les transformations de Laplace qui correspondent aux autres systèmes de caractéristiques. LE ROUX a trouvé que l'application d'une transformation (17) à l'équation (16') conduit ordinairement, non à une équation de même type, mais à un système de plusieurs équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur à n ; et par l'application répétée de la transformation en question on serait de règle conduit à un système d'équations très compliqué.

PISATI ¹⁾ a plus tard montré que, parmi les équations (16'), ce n'est en général que l'équation

$$(19) \quad \varphi_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi_0 z = 0, \text{ où } \varphi_1 = \sum_{j=0}^{n-1} A_{1j} \frac{\partial^j}{\partial y^j}; \varphi_0 = \sum_{j=0}^n A_{0j} \frac{\partial^j}{\partial y^j},$$

qui est ramenée par la transformation (17) à une équation de même type et de même ordre au plus. De plus, PISATI a prouvé que si l'équation (19) admet $m + 1$ intégrales entre lesquelles il n'existe aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants, mais une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions de x , on obtient, en appliquant la transformation

$$\theta = \varphi_1 z$$

$m - 1$ fois (doit être: $m - 1$ fois au plus) de suite, une équation qui admet une intégrale de la forme αX . (Pisati a exclu le cas où $A_{1, n-1} = 0$, mais la thèse est valable pour ce cas aussi.) Pour l'équation

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + A_{11} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + A_{10} \frac{\partial z}{\partial x} + A_{02} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + A_{01} \frac{\partial z}{\partial y} + A_{00} z = 0,$$

PISATI a défini les fonctions des coefficients qui ne changent pas avec la substitution $z = \lambda \bar{z}$; PISATI a aussi donné les conditions que ces invariants doivent vérifier pour que l'équation admette une ou deux intégrales de la forme αX .

C'est l'équation (19) que j'ai étudiée de plus près — d'ailleurs indépendamment

¹⁾ Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. 20, 1905, pages 344 - 374: Sulla estensione del metodo di Laplace alle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque con due variabili indipendenti.

du mémoire de PISATI, qui ne m'est parvenu qu'en 1908 — et j'ai trouvé que presque tous les résultats obtenus par DARBOUX pour l'équation (1) peuvent être étendus à l'équation (19).

Pour l'équation (19) d'ordre n , il existe, si $A_{1, n-1} \neq 0$, deux systèmes de caractéristiques distincts:

$$x = \text{const.}$$

est un système de caractéristiques multiple d'ordre $n - 1$ et

$$f(x, y) = \text{const.}, \text{ où } A_{1, n-1} \frac{\partial f}{\partial x} + A_{0, n} \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

est un système de caractéristiques simple; si $A_{1, n-1} = 0$,

$$x = \text{const.}$$

est un système de caractéristiques multiple d'ordre n . Dans mes recherches j'ai traité à part le cas où tous les systèmes de caractéristiques coïncident et celui où $n - 1$ seuls coïncident.

S'il y a deux systèmes de caractéristiques distincts, nous pouvons en effectuant un changement de variables indépendantes choisir les nouvelles variables indépendantes de la manière que y sera une variable caractéristique simple et x une variable caractéristique d'ordre $n - 1$, et l'équation (19) pourra s'écrire:

$$(20) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) = 0, \\ A_q = 1, \quad q + 1 = n. \end{cases}$$

où A_i, B_i sont des fonctions de x et de y . L'équation (20) a été l'objet de recherches dans les quatre premiers chapitres.

Dans le chapitre premier, je donne un exposé de la méthode de Laplace étendue à l'équation (20). La méthode de Laplace appliquée à l'équation (20) doit être une méthode pour reconnaître si l'équation (20) admet une intégrale de la forme d'Euler, et dans ce cas une méthode qui permet de déterminer cette intégrale ou ces intégrales. Lorsque l'équation (20) admet une intégrale de la forme d'Euler, celle-ci doit être ou du type (4) ou du type (5); l'équation ne peut admettre que q intégrales distinctes du type (4) et seulement une intégrale du type (5). D'après LE ROUX, il y a deux transformations de Laplace complètement déterminées: la transformation

$$(21) \quad z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i},$$

qui correspond au système de caractéristiques multiple $x = \text{const.}$, et la transformation

$$(21') \quad \theta = \frac{\partial z}{\partial x} + B_q z,$$

qui correspond au système de caractéristiques simple $y = \text{const.}$ — Si l'on applique la transformation (21) à l'équation (20), on obtient des résultats qui sont tout à fait analogues à ceux obtenus pour la transformation (6)

appliquée à l'équation (1), et on a le droit de considérer la transformation (21) comme une transformation de Laplace à l'équation (20). Si l'équation (20) admet une intégrale de la forme (4), on obtient, en appliquant la transformation (21) m fois au plus, une équation de même type et de même ordre qui admet une intégrale de la forme αX , et l'ordre de l'équation transformée peut être immédiatement diminué d'une unité. Chaque intégrale du type (4) peut être obtenue en appliquant la transformation (21) un nombre suffisant de fois; pour obtenir les intégrales du type (4), il ne faut que l'intégration d'équations différentielles linéaires du premier ordre (en cas exceptionnel d'ordre supérieur). Lorsque l'équation (20) admet s intégrales distinctes du type (4), l'intégration de l'équation (20) peut être ramenée, par l'application répétée de la transformation (21), à l'intégration d'une équation du type (20) et d'ordre $n - s$ et à l'intégration d'équations différentielles linéaires. — Si l'on applique la transformation (21') à l'équation (20), θ est de règle déterminée par $n - 1$ équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre $2(n - 1)$, et une application répétée de la transformation en question amènerait de règle un système compliqué d'équations. Mais j'ai trouvé une transformation linéaire

$$(22) \quad z_{-q} = \sum_{i=0}^{q-1} \left(T_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right),$$

où T_i et U_i sont des fonctions complètement déterminées des coefficients de l'équation (20), laquelle est analogue à la transformation (7) de Laplace. En appliquant la transformation (22) à l'équation (20), on est conduit à une équation de même type et de même ordre, pourvu que l'équation (20) ne soit pas de la forme

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[\gamma \sum_{i=0}^{q-1} \left(T_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \right] = 0,$$

γ étant une fonction de x et de y . Et si l'équation (20) est de cette dernière forme, l'ordre de l'équation peut être immédiatement diminué d'une unité. Lorsque l'équation (20) admet une intégrale du type (5), on obtient celle-ci à l'aide de la transformation (22) et par l'intégration d'équations différentielles linéaires de règle du premier ordre. La transformation (22) est inverse à la transformation (21), de même que la transformation (7) est inverse à la transformation (6). C'est la transformation (22) qui doit être considérée comme la transformation de Laplace complètement déterminée correspondant au système de caractéristiques $y = \text{const.}$ — Je désigne l'équation (20) par la lettre (E) . Par l'application répétée de la transformation (21) à l'équation (20), on obtient une série d'équations de même type et d'ordre n au plus; ces équations sont désignées par (E_1) , (E_2) , (E_3) , ... Et par l'application répétée de la transformation (22) à l'équation (20), on obtient une série d'équations de même type et d'ordre n au plus; ces équations sont désignées par (E_{-1}) , (E_{-2}) , (E_{-3}) , ... — En examinant le rapport qu'il y a entre l'équation (20) et l'équation adjointe

$$(23) \quad \sum_{i=0}^q (-1)^{i+1} \left[\frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_i u) - \frac{\partial^i}{\partial y^i} (B_i u) \right] = 0,$$

j'ai obtenu des résultats qui renferment ceux obtenus pour les équations (1) et (14). La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une intégrale du type (5) est que l'équation adjointe (23) admette q intégrales distinctes du type (4); si l'équation (23) admet q intégrales distinctes

$$\alpha_{0,i} X_i^{(m_i)} + \alpha_{1,i} X_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_{m_i-1,i} X_i' + \alpha_{m_i,i} X_i, \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

X_i étant des fonctions arbitraires de x et $\alpha_{0,i}, \alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{m_i-1,i}, \alpha_{m_i,i}$ des fonctions déterminées de x et de y , l'équation (20) admet une intégrale de la forme

$$\beta_0 Y^{(r)} + \beta_1 Y^{(r-1)} + \dots + \beta_{r-1} Y' + \beta_r Y, \quad \text{où } r = \sum_{i=1}^q m_i.$$

Lorsque l'équation adjointe (23) admet s intégrales distinctes du type (4), l'on peut par l'application répétée de la transformation (22) diminuer l'ordre de l'équation (20) de s unités. Si l'une des équations (20) et (23) admet une intégrale du type (5) et que, par conséquent, l'autre équation admette q intégrales distinctes du type (4), l'intégration de l'équation (20) et de l'équation (23) peut être ramenée par la méthode de Laplace à l'intégration d'équations différentielles linéaires. Aussi dans d'autres cas, l'intégration des équations (20) et (23) peut être ramenée par la méthode de Laplace à l'intégration d'équations différentielles linéaires; une condition nécessaire (pas suffisante) pour ceci est que l'équation (20) admette s intégrales distinctes du type (4) et que l'équation (23) admette au moins $q - s$ intégrales distinctes du type (4); la condition nécessaire et suffisante est donnée dans la proposition 12. — Lorsque l'équation (20) admet une intégrale de la forme d'Euler, il existe pour l'équation adjointe (23) une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une intégrale de la forme (4) est que l'équation (23) admette une intégrale intermédiaire de la forme

$$\sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{m+1} a_{ij} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} = X,$$

où les coefficients a_{ij} sont des fonctions de x et de y ; toute intégrale de l'équation (23) est aussi intégrale de cette équation. Et la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une intégrale de la forme (5) est que l'équation (23) admette une intégrale intermédiaire de la forme

$$\sum_{i=0}^{q+r} b_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} = Y,$$

où les coefficients b_i sont des fonctions de x et de y .

Dans le chapitre II, j'ai défini $2q$ fonctions des coefficients de l'équation (20) qui forment un système complet d'invariants. Deux équations qui admettent les

mêmes valeurs des invariants qui forment un système complet peuvent se ramener l'une à l'autre par la substitution $z = \lambda \bar{z}$. J'ai donné les relations que les invariants doivent vérifier pour que l'équation (20) admette s intégrales distinctes $\alpha_i X_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$), de même les relations que les invariants doivent vérifier pour que l'équation adjointe (23) admette s intégrales distinctes $\alpha_i X_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Ensuite j'ai donné les relations qu'il y a entre les invariants de l'équation (20) et ceux de l'équation (E_1) , quand celle-ci est d'ordre n et quand elle est d'ordre inférieur à n ; par là sont données aussi les relations qu'il y a entre les invariants de l'équation (20) et ceux de l'équation (E_{-1}) . Ainsi il n'est pas nécessaire de former les équations (E_1) , (E_2) , (E_3) , $\dots$ et (E_{-1}) , (E_{-2}) , (E_{-3}) , $\dots$ pour reconnaître si l'équation (20) ou l'équation (23) admettent une intégrale de la forme d'Euler. Au lieu de cela, on peut calculer les invariants des équations (E_1) , (E_2) , (E_3) , $\dots$ (E_{-1}) , (E_{-2}) , (E_{-3}) , $\dots$ en partant des invariants de l'équation (20), mais cela sera ordinairement très compliqué. — Dans des cas spéciaux, on peut cependant aisément trouver les valeurs des invariants des équations (E_1) , (E_2) , $\dots$ (E_{-1}) , (E_{-2}) , $\dots$. Comme exemple j'ai traité l'équation

$$\sum_{i=0}^q \left[a_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + (b_i + c a_i y) \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right] = 0, \quad (a_q = 1; b_q = 0; a_{q-1} = 0; c \neq 0)$$

où a_i , b_i , c sont des constantes; tous les invariants de cette équation sont des constantes. La condition nécessaire et suffisante pour que cette équation admette s intégrales distinctes du type (4) est que l'équation algébrique

$$\sum_{i=0}^q d_i (mc)^i = 0,$$

où les coefficients d_i sont des fonctions complètement déterminées des invariants de l'équation donnée et où m est la quantité inconnue, ait s racines qui sont des nombres entiers positifs (zéro inclusivement). Et la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation adjointe admette s intégrales distinctes du type (4) est que cette équation algébrique ait s racines qui sont des nombres entiers négatifs (zéro exclusivement). — Comme j'ai dit (page 11), PISATI a généralisé le critérium de Goursat. J'ai obtenu des résultats un peu plus complets. Si l'équation (20) admet $m+1$ intégrales ζ_i ($i = 1, 2, \dots, m+1$) entre lesquelles il existe une relation, et une seule, de la forme

$$\zeta_{m+1} = \sum_{i=1}^m f_i(x) \zeta_i,$$

les $m+1$ intégrales déterminent une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial^i \zeta}{\partial y^i} = 0,$$

les coefficients λ_i étant des fonctions de x et de y , laquelle forme un système en involution avec l'équation (20). On peut toujours supposer qu'il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{i=1}^m c_i f_i(x) = c_{m+1},$$

c_i ($i = 1, 2, \dots, m+1$) étant des constantes. Les deux équations

$$\sum_{i=1}^q A_i \frac{\partial^i \xi}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial^i \xi}{\partial y^i} = 0$$

admettent au moins une solution commune. Si les deux équations admettent seulement une solution commune, l'équation (20) admet une intégrale de la forme

$$\alpha_0 X^{(m-1)} + \alpha_1 X^{(m-2)} + \dots + \alpha_{m-2} X' + \alpha_{m-1} X,$$

et cette intégrale peut être déduite directement des intégrales ξ_i ($i = 1, 2, \dots, m+1$). Si les équations en question admettent s solutions distinctes en commun, l'équation (20) admet s intégrales distinctes du type (4), et ces intégrales sont de la forme

$$\alpha_{0i} X_i^{(m_i-1)} + \alpha_{1i} X_i^{(m_i-2)} + \dots + \alpha_{m_i-2,i} X_i' + \alpha_{m_i-1,i} X_i, \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

où $\sum_{i=1}^s m_i = m$.

Dans le chapitre III, j'ai examiné les équations (20) qui admettent n intégrales distinctes de la forme d'Euler. L'intégrale générale des équations en question est représentée par la formule

$$(24) \quad z = M \begin{vmatrix} X_1 & X_1' & \dots & X_1^{(m_1)} & X_2 & X_2' & \dots & X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X_q' & \dots & X_q^{(m_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r)} \\ x_{11} & x_{11}' & \dots & x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x_{12}' & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x_{1q}' & \dots & x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(r)} \\ x_{21} & x_{21}' & \dots & x_{21}^{(m_2)} & x_{22} & x_{22}' & \dots & x_{22}^{(m_2)} & \dots & x_{2q} & x_{2q}' & \dots & x_{2q}^{(m_q)} & y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x_{h1}' & \dots & x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x_{h2}' & \dots & x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x_{hq}' & \dots & x_{hq}^{(m_q)} & y_h & y_h' & \dots & y_h^{(r)} \end{vmatrix},$$

$h = r + q + \sum_{i=1}^q m_i$; x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, h$) étant des fonctions déterminées de y et M

une fonction déterminée de x et de y . Inversement, chaque expression de la forme (24), le coefficient de $Y^{(r)}$ n'étant pas nul, représente l'intégrale générale d'une équation du type (20) et d'ordre n au plus; la condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression de la forme (24), le coefficient de $Y^{(r)}$ n'étant pas nul, soit l'intégrale générale d'une équation du type (20) et d'ordre $n-s$ est qu'il existe s — et pas plus de s — relations distinctes de la forme

$$\sum_{i=1}^q f_i(x) \alpha_{0i} = 0,$$

α_{0i} étant les coefficients de $X_i^{(m_i)}$ dans le déterminant (24). Si nous supposons que l'intégrale générale de l'équation (20) soit donnée sous la forme (24), l'on peut en déduire directement l'intégrale générale de l'équation (E_i) ($i \leq 0$), du moins si l'équation (E_i) est d'ordre n ; aussi l'intégrale générale de l'équation adjointe (23) peut être déduite de l'intégrale (24).

Enfin dans le chapitre IV, j'ai examiné les équations (20) qui admettent une intégrale du type (5). L'intégrale générale des équations en question est représentée par la formule

$$(25) \quad \left| \begin{array}{cccccccccccc} \theta & \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial^{m_1-1} \alpha_1}{\partial x^{m_1-1}} & \alpha_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial^{m_2-1} \alpha_2}{\partial x^{m_2-1}} & \dots & \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial x} & \dots & \frac{\partial^{m_q-1} \alpha_q}{\partial x^{m_q-1}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{m_1} \alpha_1}{\partial x^{m_1-1} \partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{m_2} \alpha_2}{\partial x^{m_2-1} \partial y} & \dots & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{m_q} \alpha_q}{\partial x^{m_q-1} \partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^h \theta}{\partial y^h} & \frac{\partial^h \alpha_1}{\partial y^h} & \frac{\partial^{h+1} \alpha_1}{\partial x \partial y^h} & \dots & \frac{\partial^{h+m_1-1} \alpha_1}{\partial x^{m_1-1} \partial y^h} & \frac{\partial^h \alpha_2}{\partial y^h} & \frac{\partial^{h+1} \alpha_2}{\partial x \partial y^h} & \dots & \frac{\partial^{h+m_2-1} \alpha_2}{\partial x^{m_2-1} \partial y^h} & \dots & \frac{\partial^h \alpha_q}{\partial y^h} & \frac{\partial^{h+1} \alpha_q}{\partial x \partial y^h} & \dots & \frac{\partial^{h+m_q-1} \alpha_q}{\partial x^{m_q-1} \partial y^h} \end{array} \right| = G(h),$$

$h = \sum_{i=1}^q m_i$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ et M étant des fonctions déterminées de x et de y ; θ étant l'intégrale générale de l'équation

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} & \dots & \frac{\partial^{q+1} \theta}{\partial x \partial y^q} \\ \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial^q \alpha_1}{\partial y^q} \\ \alpha_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial^q \alpha_2}{\partial y^q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial^q \alpha_q}{\partial y^q} \end{array} \right| = 0.$$

Inversement, chaque expression (25) où θ est définie de cette manière représente l'intégrale générale d'une équation du type (20) et d'ordre n au plus. Lorsque s — et pas plus de s — relations distinctes de la forme

$$\sum_{i=1}^q f_i(x) G\left(\frac{\partial^{m_i} \alpha_i}{\partial x^{m_i}}\right) = 0$$

existent, l'expression (25) est l'intégrale générale d'une équation du type (20) et d'ordre $n - s$. Si nous supposons que l'intégrale générale de l'équation (20) soit donnée sous la forme (25), l'on peut en déduire directement l'intégrale générale de l'équation (E_i) ($i \geq 0$), du moins si l'équation (E_i) est d'ordre n . — Je n'ai pas réussi à donner la formule générale de l'intégrale générale des équations (20) qui admettent q intégrales distinctes du type (4); par suite je n'ai pas réussi à déduire de l'intégrale (25) la solution générale de l'équation adjointe (23).

Dans le dernier chapitre, V, j'applique la méthode de Laplace à celles des équations (19) pour lesquelles tous les systèmes de caractéristiques coïncident. J'écris les équations en question

$$(26) \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0 \quad (A_q = 1; B_n \neq 0; q + 1 < n).$$

Si l'équation (26) admet une intégrale de la forme d'Euler, celle-ci doit être du type (4), puisque x est la variable caractéristique; l'équation (26) admet au plus q

intégrales distinctes de ce type; par conséquent, l'intégrale générale ne peut pas être représentée par des intégrales de la forme d'Euler. Comme il n'existe qu'un système de caractéristiques pour l'équation (26), il n'y a qu'une transformation de Laplace complètement déterminée, c'est-à-dire la transformation (21). Si l'on applique la transformation (21) à l'équation (26), on obtient les mêmes résultats qui ont été obtenus pour l'équation (20). Chaque intégrale de la forme d'Euler peut être obtenue par l'application répétée de la transformation (21); pour obtenir les intégrales de la forme d'Euler, il ne faut que l'intégration d'équations différentielles linéaires du premier ordre (en cas exceptionnel d'ordre supérieur). Si l'équation (26) admet s intégrales distinctes du type (4), l'intégration de l'équation (26) peut être ramenée, par l'application répétée de la transformation (21), à l'intégration d'une équation de même type et d'ordre $n - s$ et à l'intégration d'équations différentielles linéaires. — Il y a aussi une transformation complètement déterminée

$$(27) \quad z_{-q} = \sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-1} U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}$$

— la transformation inverse à la transformation (21) — par laquelle l'équation (26) est ramenée à une équation de même type et de même ordre, pourvu que l'équation (26) ne soit pas de la forme

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[\gamma \left(\sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-1} U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \right] = 0.$$

Si l'on applique la transformation (27) à l'équation (26) et la transformation (21) à l'équation adjointe

$$(28) \quad \sum_{i=0}^q (-1)^{i+1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_i u) + \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial y^i} (B_i u) = 0,$$

l'on obtient deux équations qui sont encore adjointes. Lorsque l'équation adjointe (28) admet s intégrales distinctes de la forme d'Euler, l'on peut par l'application répétée de la transformation (27) diminuer l'ordre de l'équation (26) de s unités. — L'intégration de l'équation (26) ne peut jamais être ramenée par la méthode de Laplace à l'intégration d'équations différentielles.

I.

Pour l'équation linéaire aux dérivées partielles (20)

$$\sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x^i \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) = 0 \quad (A_q = 1; \quad q + 1 = n),$$

il existe deux systèmes de caractéristiques distinctes: y est une variable caractéristique simple et x une variable caractéristique d'ordre q . Si l'équation admet une intégrale explicite dépendant d'une fonction arbitraire dont l'argument est une fonction déterminée de x et de y , la fonction arbitraire doit être ou une fonction de x ou une fonction de y , et comme l'équation est linéaire, l'intégrale doit être de la forme d'Euler. La méthode de Laplace étendue à l'équation (20) doit être une méthode pour reconnaître si l'équation admet une intégrale de la forme d'Euler, et dans ce cas une méthode qui permet de déterminer cette intégrale ou ces intégrales.

Pour abréger, je nomme une intégrale de la forme d'Euler dépendant d'une fonction arbitraire de x , c'est-à-dire une intégrale du type (4): une X -intégrale; de même, je nomme une intégrale du type (5): une Y -intégrale. Si l'intégrale (4) ne peut se réduire par rapport à m (c'est-à-dire si l'intégrale ne peut se mettre sous une telle forme qu'elle contienne une fonction arbitraire de x et ses dérivées jusqu'à l'ordre $m - 1$ seulement), on dit que l'intégrale est de rang $m + 1$. DARBOUX est le premier qui ait employé cette dénomination. Si l'intégrale (4), où $\alpha_0 \neq 0$, est de rang $m + 1 - p$, il faut qu'elle puisse s'écrire

$$\left(\bar{\alpha}_0 \frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}} + \bar{\alpha}_1 \frac{\partial^{m-p-1}}{\partial x^{m-p-1}} + \dots + \bar{\alpha}_{m-p} \right) \left(x_0 X^{(p)} + x_1 X^{(p-1)} + \dots + x_p X \right),$$

où $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{m-p}$ sont des fonctions déterminées de x et de y , et $x_0, x_1, \dots, x_p$ des fonctions déterminées de x . Il en suit que la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale (4), où $\alpha_0 \neq 0$, soit de rang $m + 1$ est que l'intégrale (4) ne s'annule pour d'autre valeur de la fonction arbitraire X que pour $X = 0$.

Supposons que s X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ soient données. Les s X -intégrales peuvent s'écrire

$$(29) \quad \zeta_i = \alpha_{0i} X_i^{(m_i)} + \alpha_{1i} X_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_{m_i i} X_i \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, s \\ m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_s \end{matrix} \right),$$

où $\alpha_{0i}, \alpha_{1i}, \dots, \alpha_{m_i i}$ sont des fonctions déterminées de x et de y , $\alpha_{0i} \neq 0$, tandis qu'aucune des intégrales ζ_i ne s'annule pour d'autre valeur de la fonction arbitraire X_i que pour $X_i = 0$. Si les s X -intégrales (29) ne peuvent être remplacées par $s-1$ X -intégrales, je dis que les s X -intégrales (29) sont distinctes. Maintenant nous allons chercher la condition nécessaire et suffisante pour que les s X -intégrales (29) ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur.

S'il existe entre α_{0i} ($i = 1, 2, \dots, s$) une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions de x , ou, autrement dit, une relation de la forme

$$\sum_{i=1}^j f_i(x) \alpha_{0i} = 0, \quad \text{où } f_j(x) \neq 0, \quad (j \leq s)$$

et que nous fassions la substitution

$$(30) \quad \begin{cases} X_i = X_i + f_i(x) \bar{X}_i & (i = 1, 2, \dots, j-1), \\ X_j = f_j(x) \bar{X}_j, \end{cases}$$

le coefficient de $\bar{X}_j^{(m_j)}$ dans l'intégrale $\sum_{i=1}^j \zeta_i$ s'annulera; par suite les j X -intégrales ζ_i ($i = 1, 2, \dots, j-1, j$) peuvent être remplacées par j X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j$ au plus.

Si l'intégrale $\sum_{i=1}^j \zeta_i$ s'annule pour

$$X_i = f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, j), \quad \text{où } f_j(x) \neq 0, \quad (j \leq s)$$

et que nous effectuions la substitution

$$(31) \quad \begin{cases} X_i = \bar{X}_i + f_i(x) \bar{X}_j & (i = 1, 2, \dots, j-1), \\ X_j = f_j(x) \bar{X}_j, \end{cases}$$

le coefficient de X_j dans l'intégrale $\sum_{i=1}^j \zeta_i$ s'annulera; par suite les j X -intégrales ζ_i ($i = 1, 2, \dots, j-1, j$) peuvent être remplacées par j X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j$ au plus.

Une condition nécessaire pour que les s X -intégrales (29) ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur est par suite qu'il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i} = 0$$

et que l'intégrale $\sum_{i=1}^s \zeta_i$ ne s'annule pour d'autre système de valeurs des fonctions arbitraires X_i que pour $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Nous verrons que c'est là aussi une condition suffisante.

Supposons qu'il n'existe pas de relation de la forme $\sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i} = 0$ et que

l'intégrale $\sum_{i=1}^s \zeta_i$ ne s'annule que pour $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Si l'on fait une substitution de la forme

$$(31') \quad X_i = \bar{X}_i + \sum_j \sum_{l=1}^{m_j - m_i} f_{ijl}(x) \bar{X}_j^{(l)} \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

les s X -intégrales (29) seront remplacées par s $\bar{X}$ -intégrales

$$\alpha_{0i} \bar{X}_i^{(m_i)} + \alpha_{1i} \bar{X}_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_{m_i i} \bar{X}_i \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

où

$$\alpha_{0j} = \alpha_{0j} + \sum_{i=1}^j f_{ijm_j - m_i}(x) \alpha_{0i} \neq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Et en général, si les s fonctions arbitraires X_i ($i = 1, 2, \dots, s$) sont remplacées par des fonctions linéaires et homogènes de s fonctions arbitraires $\bar{X}_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$) et de leurs dérivées, les coefficients étant des fonctions déterminées de x , les s X -intégrales (29) seront remplacées par s $\bar{X}$ -intégrales

$$\bar{\zeta}_i = \alpha_{0i} \bar{X}_i^{(n_i)} + \alpha_{1i} \bar{X}_i^{(n_i-1)} + \dots + \alpha_{n_i i} \bar{X}_i \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, s \\ n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_s \end{matrix} \right),$$

où $\alpha_{0i} \neq 0$ et où $n_i \geq m_i$ (il faut, bien entendu, que la substitution en question ne donne pas de relation entre les fonctions X_i ($i = 1, 2, \dots, s$)). Nous en concluons que les s X -intégrales (29) ne peuvent être remplacées par des intégrales de rang inférieur. En effet, si les s X -intégrales (29) pouvaient être remplacées par des intégrales de rang inférieur, on pourrait écrire l'intégrale $\sum_{i=1}^s \zeta_i$ sous la forme

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^s \zeta_i = \sum_{i=1}^s \zeta_i, \\ \bar{\zeta}_i = \alpha_{0i} \bar{X}_i^{(n_i)} + \alpha_{1i} \bar{X}_i^{(n_i-1)} + \dots + \alpha_{n_i i} \bar{X}_i, \end{cases}$$

où $\sum_{i=1}^s n_i < \sum_{i=1}^s m_i$ et où $\bar{X}_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$) sont des fonctions linéaires et homogènes de $X_1, X_2, \dots, X_s$ et de leurs dérivées, les coefficients étant des fonctions déterminées de x ; l'intégrale $\sum_{i=1}^s \bar{\zeta}_i$ s'annule pour $\bar{X}_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$), et comme nous sommes partis de ce que l'intégrale $\sum_{i=1}^s \zeta_i$ ne s'annule que pour $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$), il en suit que toutes les fonctions X_i ($i = 1, 2, \dots, s$) sont des fonctions linéaires et homogènes de $X_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_s$ et de leurs dérivées, les coefficients étant des fonctions déterminées de x , mais cela est contraire à la supposition $\sum_{i=1}^s n_i < \sum_{i=1}^s m_i$.

Lorsque les s X -intégrales (29) peuvent être remplacées par $s - 1$ X -intégrales, il est aisé de voir qu'une relation de la forme $\sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i} = 0$ existe; de même, lorsque les s X -intégrales (29) peuvent être remplacées par $s - r$ X -intégrales, il faut qu'il existe r relations distinctes de la forme $\sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i} = 0$.

Proposition 1. La condition nécessaire et suffisante pour que les s X -intégrales

$$\zeta_i = \alpha_{0i} X_i^{(m_i)} + \alpha_{1i} X_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_{m_i i} X_i \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

ne puissent être remplacées par des intégrales de rang inférieur à $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots$

$m_s + 1$ est qu'il n'existe pas de relation de la forme $\sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i} = 0$ et que l'intégrale

$\sum_{i=1}^s \zeta_i$ ne s'annule pour d'autre système de valeurs des fonctions arbitraires X_i que

pour $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Une condition nécessaire pour que les s X -intégrales puissent être remplacées par $s - r$ X -intégrales est qu'il existe r relations distinctes

de la forme $\sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i} = 0$.

La méthode de Laplace, appliquée à l'équation (10), consiste à ramener l'intégration de l'équation proposée à l'intégration d'une équation de même type qui admet une intégrale de la forme d'Euler de rang 1; et pour que la méthode réussisse, il faut et il suffit que l'équation admette une intégrale de la forme d'Euler.

Maintenant que nous allons appliquer cette méthode à l'équation (20), il est naturel de chercher d'abord les conditions qui doivent être remplies pour que l'équation (20) admette une ou plusieurs intégrales de la forme d'Euler de rang 1 et, s'il y en a, d'examiner à quel point l'intégration de l'équation peut être simplifiée.

La condition pour que l'équation (20) admette une X -intégrale de rang 1, s'obtient en substituant $z = \alpha_0 X$ dans l'équation (20). Nous aurons alors

$$(32) \quad X' \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} + X \sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1} \alpha_0}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} \right) = 0.$$

La condition pour que l'équation (20) admette l'intégrale $\alpha_0 X$ est que α_0 satisfasse aux deux équations

$$(33) \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad (34) \quad \sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1} \alpha_0}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} \right) = 0,$$

parce que l'équation (32) doit être vérifiée quelle que soit la fonction X . En différentiant l'équation (33) par rapport à x et en tenant compte de l'équation (34), nous obtiendrons l'équation

$$\sum_{i=0}^q \left(\frac{\partial A_i}{\partial x} - B_i \right) \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0.$$

Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une X -intégrale de rang 1 est que les deux équations différentielles (33) et

$$(35) \quad \sum_{i=0}^{q-1} P_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \text{où } P_i = \frac{\partial A_i}{\partial x} + A_i B_q - B_i,$$

admettent une intégrale commune (la solution triviale $\alpha_0 = 0$, bien entendu, non comptée), résultat déjà obtenu par PISATI.

De la même manière, nous pouvons montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette s X -intégrales distinctes de rang 1 est

que les deux équations différentielles (33) et (35) admettent s solutions distinctes en commun (je dis que les intégrales α_i ($i = 1, 2, \dots, s$) de l'équation $\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0$ sont distinctes, s'il n'existe entre α_i ($i = 1, 2, \dots, s$) aucune relation de la forme $\sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_i = 0$).

Comme on le sait, nous pouvons reconnaître si les deux équations (33) et (35) admettent des intégrales communes — et dans ce cas combien — par des différentiations et des opérations algébriques. En différentiant l'équation (33) $j-2$ fois par rapport à y et l'équation (35) $j-1$ fois par rapport à y et en éliminant entre ces $2j-1$ équations

$$\sum_{i=0}^{h+q} a_{ih} \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad (h = 0, 1, \dots, j-2), \quad \text{où} \quad a_{ih} = \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} \frac{\partial^{h-k} A_{i-k}}{\partial y^{h-k}},$$

$$\sum_{i=0}^{h+q-1} p_{ih} \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad (h = 0, 1, \dots, j-1), \quad \text{où} \quad p_{ih} = \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} \frac{\partial^{h-k} P_{i-k}}{\partial y^{h-k}}.$$

les $2j-2$ quantités $\frac{\partial^{q+j-2} \alpha_0}{\partial y^{q+j-2}}, \frac{\partial^{q+j-3} \alpha_0}{\partial y^{q+j-3}}, \dots, \frac{\partial^{q-j+1} \alpha_0}{\partial y^{q-j+1}}$, nous obtiendrons l'équation

$$(36) \quad \sum_{i=0}^{q-j} P_{ij} \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \text{où}$$

$$P_{ij} = \begin{vmatrix} p_{q+j-2, j-1} & p_{q+j-3, j-1} & p_{q+j-4, j-1} & \dots & p_{q-j+1, j-1} & p_{i, j-1} \\ 0 & p_{q+j-3, j-2} & p_{q+j-4, j-2} & \dots & p_{q-j+1, j-2} & p_{i, j-2} \\ 0 & 0 & p_{q+j-4, j-3} & \dots & p_{q-j+1, j-3} & p_{i, j-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{q-j+1, 0} & p_{i, 0} \\ a_{q+j-2, j-2} & a_{q+j-3, j-2} & a_{q+j-4, j-2} & \dots & a_{q-j+1, j-2} & a_{i, j-2} \\ 0 & a_{q+j-3, j-3} & a_{q+j-4, j-3} & \dots & a_{q-j+1, j-3} & a_{i, j-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{q-j+1, 0} & a_{i, 0} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (i=0, 1, \dots, q-j) \\ (j=1, 2, \dots, q) \end{matrix}$$

[d'après cette désignation nous avons $P_{i1} = P_i$ ($i = 0, 1, \dots, q-1$)]. Entre les coefficients P_{ij} ($i = 0, 1, \dots, q-j$; $j = 1, 2, \dots, q$) il existe encore les relations suivantes

$$P_{i, j+1} (P_{r+1, j-1})^2 = \begin{vmatrix} P_{r, j} & P_{r-1, j} + P'_{r, j} & P_{i-1, j} + P'_{i, j} \\ 0 & P_{r, j} & P_{i, j} \\ P_{r-1, j-1} & P_{r, j-1} & P_{i, j-1} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{array}{cccccc}
& & P_{i,j+2}(P_{r+1,j-1})^4 = & & & \\
P' & P_{r-1,j} + 2P'_{r,j} & P_{r-2,j} + 2P'_{r-1,j} + P''_{r,j} & P_{r-3,j} + 2P'_{r-2,j} + P''_{r-1,j} & P_{i-2,j} + 2P'_{i-1,j} + P''_{i,j} & \\
0 & P_{r,j} & P_{r-1,j} + P'_{r,j} & P_{r-2,j} + P'_{r-1,j} & P_{i-1,j} + P'_{i,j} & \\
0 & 0 & P_{r,j} & P_{r-1,j} & P_{i,j} & \\
P_{r+1,j-1} & P_{r,j-1} + P'_{r+1,j-1} & P_{r-1,j-1} + P'_{r,j-1} & P_{r-2,j-1} + P'_{r-1,j-1} & P_{i-1,j-1} + P'_{i,j-1} & \\
0 & P_{r+1,j-1} & P_{r,j-1} & P_{r-1,j-1} & P_{i,j-1} &
\end{array}$$

etc., où $r = q - j$ et où la désignation $\frac{\partial P}{\partial y} = P'$, $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = P''$ est employée. La condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations (33) et (35) admettent s solutions distinctes communes est que l'on ait

$$\sum_{i=0}^{q-j} P_{ij} \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0 \quad (j = q - s + 1, q - s + 2, \dots, q)$$

ou autrement dit, que l'on ait

$$P_{ij} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} i = 0, 1, \dots, q - j \\ j = q - s + 1, q - s + 2, \dots, q \end{array} \right);$$

et cette condition est identique à la condition

$$P_{i,q-i} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, s - 1).$$

Supposons $P_{i,q-i} = 0$ ($i = 0, 1, \dots, s - 1$), $P_{i,q-i} \neq 0$. Il en suit que les deux équations (33) et (35) admettent $s - 1$ et pas plus de $s - 1$ intégrales distinctes communes, lesquelles sont obtenues par l'intégration de l'équation différentielle (36) où $j = q - s$; l'équation (20) admet par suite $s - 1$ et pas plus de $s - 1$ X -intégrales distinctes de rang 1, lesquelles sont obtenues par l'intégration de l'équation (36) où $j = q - s$, et l'équation (20) peut par suite se mettre sous la forme

$$(37) \quad \sum_{i=0}^{q-s} \left(M_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + N_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \sum_{h=0}^s \frac{P_{h,q-s}}{P_{s,q-s}} \frac{\partial^h z}{\partial y^h} = 0,$$

M_i et N_i étant des fonctions de x et de y , qu'il n'y a pas trop d'intérêt à définir.

Proposition 2. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette s X -intégrales distinctes de rang 1 est que les deux équations différentielles

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{q-1} P_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0, \quad \text{où } P_i = \frac{\partial A_i}{\partial x} + A_i B_q - B_i,$$

admettent s intégrales distinctes communes, et cette condition est identique aux conditions

$$P_{i,q-i} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, s - 1)$$

(pour la désignation P_{ij} voir page 23). Supposons

$$P_{i,q-i} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, s - 1), \quad P_{s,q-s} \neq 0.$$

Les s X -intégrales de rang 1 peuvent être obtenues par l'intégration de l'équation

$$\sum_{i=0}^q P_{i,q-s} \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0;$$

l'équation (20) peut s'écrire

$$\sum_{i=0}^q \left(M_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + N_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \sum_{h=0}^s \frac{P_{h, q-s}}{P_{s, q-s}} \frac{\partial^h z}{\partial y^h} = 0,$$

et l'intégration de l'équation (20) se ramène à l'intégration des deux équations

$$\sum_{i=0}^{q-s} \left(M_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + N_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0, \quad \sum_{h=0}^s P_{h, q-s} \frac{\partial^h z}{\partial y^h} = P_{s, q-s} z.$$

Le cas où $s = q$ est d'un intérêt spécial. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette q X -intégrales distinctes de rang 1 est que l'on ait

$$\frac{\partial A_i}{\partial x} + A_i B_q - B_i = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, q-1).$$

Si ces conditions sont vérifiées, l'équation (20) peut s'écrire

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + B_q \right) \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0,$$

et l'on obtient par suite l'intégrale générale par l'intégration successive de deux équations différentielles, dont la première est du premier ordre et la seconde d'ordre q .

Pour reconnaître si l'équation (20) admet une Y -intégrale de rang 1, nous substituons $z = \beta Y$ dans l'équation (20). Lorsque l'équation (20) admet l'intégrale βY , l'équation

$$\sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) (\beta Y) = 0$$

doit être vérifiée quelle que soit la fonction Y . Il en suit que β est déterminée par l'équation $\left(\frac{\partial}{\partial x} + B_q \right) \beta = 0$, et que l'équation (20) peut s'écrire

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + B_q z \right) = 0.$$

L'équation adjointe de cette dernière équation peut s'écrire

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - B_q \right) \sum_{i=0}^q (-1)^{i+1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} (A_i u) = 0,$$

et cette équation admet q X -intégrales distinctes de rang 1. Il en suit que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une Y -intégrale de rang 1 est que l'équation adjointe (23) admette q X -intégrales distinctes de rang 1.

L'équation adjointe (23) peut s'écrire

$$(38) \quad \sum_{i=0}^q \left(C_i \frac{\partial^{i+1} u}{\partial x \partial y^i} + D_i \frac{\partial^i u}{\partial y^i} \right) = 0, \quad \text{où}$$

$$(38') \quad C_i = (-1)^{q-i} \sum_{j=0}^q (-1)^j \frac{(i+j)!}{i! j!} \frac{\partial^j A_{i+j}}{\partial y^j}, \quad \frac{\partial C_i}{\partial x} - D_i = (-1)^{q-i} \sum_{j=0}^q (-1)^j \frac{(i+j)!}{i! j!} \frac{\partial^j B_{i+j}}{\partial y^j}.$$

Supposons que l'équation adjointe (23) admette s — et pas plus de s — X -intégrales distinctes de rang 1 ou, autrement dit, supposons que les deux équations différentielles

$$(38'') \quad \sum_{i=0}^q C_i \frac{\partial^i \gamma}{\partial y^i} = 0, \quad (38''') \quad \sum_{i=0}^{q-1} Q_i \frac{\partial^i \gamma}{\partial y^i} = 0, \quad \text{où } Q_i = \frac{\partial C_i}{\partial x} + C_i D_q - D_i,$$

admettent s intégrales distinctes communes. L'équation (23) peut alors s'écrire

$$\sum_{i=0}^{q-s} (-1)^{i+1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} \left(R_i \sum_{h=0}^s \frac{Q_{h, q-s} \frac{\partial^h \gamma}{\partial y^h}}{Q_{s, q-s}} \right) + \sum_{i=0}^{q-s} (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left(S_i \sum_{h=0}^s \frac{Q_{h, q-s} \frac{\partial^h \gamma}{\partial y^h}}{Q_{s, q-s}} \right) = 0,$$

où les coefficients Q_{ij} sont formés des coefficients $C_0, C_1, \dots, C_q, Q_0, Q_1, \dots, Q_{q-1}$ de la même manière que les coefficients P_{ij} (page 23) ont été formés des coefficients $A_0, A_1, \dots, A_q, P_0, P_1, \dots, P_{q-1}$; les coefficients R_i et S_i sont des fonctions de x et de y ; $R_{q-s} = 1$. L'équation (20) peut par suite se mettre sous la forme

$$(39) \quad \sum_{h=0}^s (-1)^h \frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[\frac{Q_{h, q-s}}{Q_{s, q-s}} \sum_{i=0}^{q-s} \left(R_i \frac{\partial^{i+1} \gamma}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i \gamma}{\partial y^i} \right) \right] = 0$$

Si nous avons obtenu s intégrales distinctes γ_i ($i = 1, 2, \dots, s$) de l'équation

$$\sum_{i=0}^s \frac{Q_{i, q-s}}{Q_{s, q-s}} \frac{\partial^i \gamma}{\partial y^i} = 0,$$

nous pouvons en déduire, sans intégration, s intégrales distinctes λ_i ($i = 1, 2, \dots, s$) de l'équation adjointe

$$\sum_{i=0}^s (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left(\frac{Q_{i, q-s}}{Q_{s, q-s}} \lambda \right) = 0,$$

et l'équation (20) peut se mettre sous la forme

$$(39') \quad \sum_{i=0}^{q-s} \left(R_i \frac{\partial^{i+1} \gamma}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i \gamma}{\partial y^i} \right) = \sum_{i=1}^s \lambda_i X_i.$$

Il en suit que, si les s X -intégrales de rang 1 de l'équation (23) sont données, l'équation (20) peut être ramenée sans intégration à la forme (39'), ou autrement dit: une intégrale intermédiaire (39') d'ordre $n - s$ de l'équation (20), dépendant de s fonctions arbitraires, peut être directement obtenue.

Proposition 3. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une Y -intégrale de rang 1 est que l'équation adjointe admette q X -intégrales distinctes de rang 1. Si l'équation (20) admet une Y -intégrale de rang 1, l'équation peut s'écrire

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} + B_q \gamma \right) = 0,$$

et l'intégrale générale s'obtient directement par l'intégration successive de deux équations différentielles, la première d'ordre q et la seconde du premier ordre. Si l'équation adjointe (23) admet $s - 1$ et pas plus de $s - 1$ X -intégrales distinctes de rang 1, l'équation (20) peut, sans intégration, être ramenée à la forme

$$\sum_{h=0}^s (-1)^h \frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[\frac{Q_{h, q-s}}{Q_{s, q-s}} \sum_{i=0}^{q-s} \left(R_i \frac{\partial^{i+1} \gamma}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i \gamma}{\partial y^i} \right) \right] = 0, \quad \text{où } R_{q-s} = 1,$$

et, par l'intégration de l'équation différentielle

$$\sum_{h=0}^s (-1)^h \frac{\partial^h}{\partial y^h} \left(\frac{Q_h, q-s}{Q_s, q-s} \lambda \right) = 0,$$

à la forme

$$\sum_{i=0}^{q-s} \left(R_i \frac{\partial^{i+1} \mathcal{Z}}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i \mathcal{Z}}{\partial y^i} \right) = \sum_{i=1}^s \lambda_i X_i.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'une des équations (20) et (23) admette une intégrale de la forme d'Euler de rang 1 est ainsi que les équations admettent une intégrale intermédiaire d'ordre inférieur à n . — Lorsque l'une des équations (20) et (23) admet q X -intégrales distinctes de rang 1 et que, par suite, l'autre équation admette une Y -intégrale de rang 1, l'intégrale générale de l'équation (20) s'obtient directement par l'intégration successive de deux équations différentielles linéaires. Aussi dans d'autres cas, l'on peut obtenir l'intégrale générale de l'équation (20) directement par l'intégration successive d'équations différentielles linéaires, c'est-à-dire si l'équation (20) peut se mettre sous la forme

$$\sum_{h=0}^{q-s} G_h \frac{\partial^h}{\partial y^h} \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_q \right) \sum_{i=0}^s F_i \frac{\partial^i \mathcal{Z}}{\partial y^i} = 0,$$

où les coefficients G_h et F_i sont des fonctions de x et de y ; $F_s = G_{q-s} = 1$. Une condition nécessaire en est que l'équation (20) admette au moins s X -intégrales distinctes de rang 1 et que l'équation adjointe (23) admette au moins $q - s$ X -intégrales distinctes de rang 1. Supposons que l'équation (20) admette les s X -intégrales distinctes $\alpha_{0i} X_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$), où $q \geq s \geq 0$. Nous écrivons

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \alpha'_{01} & \dots & \alpha_{01}^{(q-1)} \\ \alpha_{02} & \alpha'_{02} & \dots & \alpha_{02}^{(q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{0q} & \alpha'_{0q} & \dots & \alpha_{0q}^{(q-1)} \end{vmatrix}, \quad \gamma_{0i} = \frac{\partial \log \delta}{\partial \alpha_{0i}^{(q-1)}} \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

où α_{0i} ($i = 1, 2, \dots, q$) sont q intégrales distinctes de l'équation (33) et où l'on a employé la désignation $\frac{\partial^j \alpha_{0i}}{\partial y^j} = \alpha_{0i}^{(j)}$. Une condition suffisante pour que l'équation (20) puisse se mettre sous la forme en question est que l'équation adjointe (23) admette les intégrales $\gamma_{0i} X_i$ ($i = s+1, s+2, \dots, q$). Et si l'équation (20) n'admet pas d'autres X -intégrales de rang 1 que les intégrales $\alpha_{0i} X_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$), il faut, pour que l'intégrale générale de l'équation (20) s'obtienne directement par l'intégration successive d'équations différentielles linéaires, que l'équation adjointe (23) admette les intégrales $\gamma_{0i} X_i$ ($i = s+1, s+2, \dots, q$).

Supposons maintenant que l'équation (20) n'admette pas d'intégrale intermédiaire d'ordre inférieur à n , ou, autrement dit, que ni l'équation (20) ni l'équation (23) n'admettent une intégrale de la forme d'Euler de rang 1. Nous ne pouvons immédiatement diminuer l'ordre de l'équation (20). Nous allons rechercher s'il est possible de trouver des transformations linéaires — analogues aux transformations

de Laplace — par lesquelles nous pourrions, dans certains cas, ramener l'équation (20) à une équation de même type et de même ordre qui admet une intégrale intermédiaire d'ordre inférieur à n . Nous ne pouvons nous attendre que cela soit possible pour une équation quelconque de type (20); nous savons que, dans le cas où $q = 1$, ce n'est possible qu'à condition que l'équation admette une intégrale de la forme d'Euler.

D'après LE ROUX (voir pages 10, 11), il existe pour l'équation (20) deux transformations de Laplace du premier ordre, c'est-à-dire la transformation

$$(40) \quad z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{\alpha_0} \right), \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0,$$

qui correspond au système de caractéristiques $x = \text{const.}$, et la transformation complètement déterminée (21')

$$\theta = \frac{z}{x} + B_1 z,$$

qui correspond au système de caractéristiques $y = \text{const.}$ Il est naturel de rechercher si par l'emploi répété de l'une de ces transformations, l'on peut, dans certains cas, ramener l'équation (20) à une équation de même type et de même ordre qui admet une intégrale intermédiaire d'ordre inférieur à n .

PISATI (voir page 11) a déjà montré que, par la transformation (40), l'équation (20) est ramenée à une équation de même type et de même ordre au plus. Je nomme la transformation (40), appliquée à l'équation (20), une transformation (t_1) . — Quant à la transformation (21'), nous trouverons d'autres transformations linéaires qui à meilleur droit peuvent être considérées comme des transformations de Laplace correspondant au système de caractéristiques $y = \text{const.}$

Nous allons maintenant appliquer la transformation (40) à une équation (20) qui n'admet pas l'intégrale $\alpha_0 X$, ou, autrement dit, pour laquelle nous avons

$$\sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \alpha_0 \neq 0.$$

En effectuant la substitution $z = \alpha_0 \bar{z}$, l'équation (20) s'écrit

$$(41) \quad \sum_{i=0}^q \left(\bar{A}_i \frac{\partial^{i+1} \bar{z}}{\partial x \partial y^i} + \bar{B}_i \frac{\partial^i \bar{z}}{\partial y^i} \right) = 0, \quad \text{où}$$

$$(41') \quad \bar{A}_i = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{h=0}^{q-i} \frac{(i+h)!}{i! h!} A_{i+h} \frac{\partial^h \alpha_0}{\partial y^h}, \quad \bar{B}_i = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{h=0}^q \frac{(i+h)!}{i! h!} \left(A_{i+h} \frac{\partial}{\partial x} + B_{i+h} \right) \frac{\partial^h \alpha_0}{\partial y^h}.$$

Les conditions

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \alpha_0 \neq 0,$$

nous donnent $\bar{A}_0 = 0$, $\bar{B}_0 \neq 0$. En appliquant ensuite la transformation $z_1 = \alpha_0 \frac{\partial z}{\partial y}$, l'équation (20) peut se mettre sous la forme

$$(42) \quad \sum_{i=1}^q \left(\bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} + \bar{B}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \right) \frac{z_1}{\alpha_0} + B_0 \frac{z}{\alpha_0} = 0.$$

L'élimination de z entre les deux équations (40) et (42) conduit à l'équation

$$(43) \quad \alpha_0 \bar{B}_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\bar{B}_0} \sum_{i=1}^q \left(\bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} + \bar{B}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \right) \frac{z_1}{\alpha_0} \right] + \bar{B}_0 z_1 = 0,$$

laquelle est du même type et du même ordre que l'équation (20).

Il résulte des équations (40) et (42) que l'intégration de l'une des équations (20) et (43) entraîne celle de l'autre.

Supposons que l'équation (20) admette la X -intégrale

$$\zeta = \alpha_0 X^{(m)} + \alpha_1 X^{(m-1)} + \dots + \alpha_m X,$$

et supposons que cette intégrale soit de rang $m+1$, c'est-à-dire que l'intégrale ne s'annule pour d'autre valeur de la fonction X que pour $X=0$. Il résulte directement de l'équation (40) que l'équation (43) admet une X -intégrale qui est de rang m au plus, c'est-à-dire l'intégrale

$$\zeta_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right) X^{(m-1)} + \dots + \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_m}{\alpha_0} \right) X.$$

Si nous substituons l'intégrale ζ dans l'équation (20), nous obtiendrons (du coefficient de $X^{(m)}$)

$$(44) \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_1}{\partial y^i} + \sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1} \alpha_0}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} \right) = 0;$$

il en suit que $\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_1}{\partial y^i} \neq 0$ et, comme $\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$, nous aurons $\alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right) \neq 0$. Le coefficient de $X^{(m-1)}$ dans l'intégrale ζ_1 n'est donc pas nul. Nous allons voir que l'intégrale ζ_1 est, en effet, de rang m . Si nous supposons que l'intégrale ζ_1 soit de rang inférieur à m , il faudrait qu'il existe une valeur, différente de zéro, de la fonction arbitraire X pour laquelle l'intégrale ζ_1 s'annulerait, et si l'intégrale ζ_1 s'annulait pour $X=f(x)$, où $f(x) \neq 0$, il résulterait de l'équation

$$\sum_{i=1}^q \left(\bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} + \bar{B}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \right) \frac{\zeta_1}{\alpha_0} + \bar{B}_0 \frac{\zeta}{\alpha_0} = 0,$$

laquelle s'obtient de l'équation (42) et qui doit être vérifiée quelle que soit la fonction X , qu'aussi l'intégrale ζ s'annulerait pour $X=f(x)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. — Je nomme une X -intégrale dans laquelle le coefficient de la plus haute dérivée de X est α : une X -intégrale qui correspond à α . — Le rang de la X -intégrale qui correspond à α_0 est ainsi diminué d'une unité par la transformation (40).

Supposons que l'équation (20) admette s X -intégrales distinctes de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ qui ne puissent être remplacées par s X -intégrales de rang inférieur. Que les s X -intégrales de l'équation (20) soient les intégrales (29); α_{0i} ($i = 1, 2, \dots, s$) sont s intégrales distinctes de l'équation (33), et l'intégrale $\sum_{i=1}^s \zeta_i$ ne s'annule pour d'autre système de valeurs des fonctions X_i que pour $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$).

Supposons de plus qu'il existe entre α_0 et α_{0i} ($i = 1, 2, \dots, s$) une relation de la forme

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i}, \quad \text{où } f_j(x) \neq 0, \quad (j \leq s). \quad \bullet$$

En effectuant la substitution (30) nous remplaçons la X -intégrale qui correspond à α_{0j} par une X -intégrale de même rang qui correspond à α_0 ; les $s - 1$ X -intégrales qui restent ne changent pas avec cette substitution. Nous pouvons supposer que la substitution en question ait déjà été faite, et ainsi nous avons

$$\alpha_0 = \alpha_{0j}.$$

De l'équation (40) il résulte directement que, de chacune des intégrales ζ_i ($i = 1, 2, \dots, s$), on obtient une X -intégrale de l'équation (43) qui est de rang $m_i + 1$ au plus, à savoir l'intégrale

$$(\zeta_i)_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_{0i}}{\alpha_0} \right) X_i^{(m_i)} + \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_{1i}}{\alpha_0} \right) X_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_{m_i i}}{\alpha_0} \right) X_i.$$

Nous avons déjà vu que l'intégrale $(\zeta_j)_1$ est de rang m_j . Les $s - 1$ X -intégrales $(\zeta_i)_1$ ($i \neq j$) qui restent sont de rang $m_i + 1$, parce que le coefficient $\alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_{0i}}{\alpha_0} \right)$ ($i \neq j$) n'est pas nul et que l'intégrale $(\zeta_i)_1$ ne s'annule pour d'autre valeur de la fonction X_i que pour $X_i = 0$, ce qui résulte de l'équation (42). Il résulte de la proposition 1 que la condition nécessaire et suffisante pour que les s X -intégrales $(\zeta_i)_1$ ($i = 1, 2, \dots, s$) ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur à $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j, m_{j+1} + 1, \dots, m_s + 1$ est qu'il n'existe aucune relation de la forme

$$(44') \quad \sum_{i=1}^s f_i(x) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_{0i}}{\alpha_0} \right) + f(x) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_{1j}}{\alpha_0} \right) = 0.$$

(la relation triviale $f_j(x) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_{0j}}{\alpha_0} \right) = 0$ non comptée) et que l'intégrale $\sum_{i=1}^s (\zeta_i)_1$ ne s'annule que pour $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Il suit de l'équation

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_{1j}}{\partial y^i} + \sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \alpha_{0j} = 0$$

(qui est obtenue de la même manière que l'équation (44)) qu'aucune relation de la forme

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i}$$

ne peut exister, et par suite aucune relation de la forme

$$\sum_{i=1}^s f_i(x) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_{0i}}{\alpha_0} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_{1j}}{\alpha_0} \right) = 0$$

ne peut exister. Et une relation de la forme

$$\sum_{i=1}^s f_i(x) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_{0i}}{\alpha_0} \right) = 0$$

serait contraire à l'hypothèse. Ainsi aucune relation de la forme (44') ne peut exister. Il résulte de l'équation (42) que l'intégrale $\sum_{i=1}^s (\zeta_i)_1$ ne s'annule que pour $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$), puisque l'intégrale $\sum_{i=1}^s \zeta_i$ ne s'annule que pour $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant: les s X -intégrales $(\zeta_i)_1$ ($i = 1, 2, \dots, s$) sont de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j, m_{j+1} + 1, \dots, m_s + 1$, et elles ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur.

Si nous supposons, au contraire, qu'il n'existe pas de relation de la forme

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i},$$

nous pouvons de la même manière montrer que les s X -intégrales distinctes $(\zeta_i)_1$ ($i = 1, 2, \dots, s$) de l'équation (43) sont de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_j + 1, \dots, m_s + 1$ et ne peuvent être remplacées par s X -intégrales de rang inférieur.

Il résulte des équations (40) et (42) que, si l'équation (20) n'admet que les s X -intégrales distinctes ζ_i ($i = 1, 2, \dots, s$), l'équation (43) n'admet que les s X -intégrales distinctes $(\zeta_i)_1$ ($i = 1, 2, \dots, s$).

Supposons maintenant que l'équation (20) admette une Y -intégrale de rang $r + 1$, ou autrement dit: une intégrale de la forme

$$\zeta = \beta_0 Y^{(r)} + \beta_1 Y^{(r-1)} + \dots + \beta_r Y \quad (\beta_0 \neq 0)$$

qui ne s'annule pour d'autre valeur de la fonction arbitraire Y que pour $Y = 0$. L'équation (43) admet l'intégrale

$$\zeta_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\alpha_0} (\beta_0 Y^{(r)} + \beta_1 Y^{(r-1)} + \beta_r Y).$$

Comme l'intégrale ζ ne s'annule que pour $Y = 0$, il suit de l'équation (42) que l'intégrale ζ_1 ne peut s'annuler non plus pour d'autre valeur de la fonction arbitraire que pour $Y = 0$. L'intégrale ζ_1 est par suite de rang $r + 2$. Et inversement, si l'équation (43) admet une Y -intégrale de rang $r + 2$, l'équation (20) admet une Y -intégrale de rang $r + 1$. L'équation (43) ne peut admettre une Y -intégrale de rang 1.

Supposons enfin que l'équation (20) admette une Y -intégrale de rang $r + 1$ et q X -intégrales distinctes de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$ qui ne puissent

être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur. Les q X -intégrales peuvent s'écrire

$$\zeta_i = \alpha_{0i} X_i^{(m_i)} + \alpha_{1i} X_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_{m_i i} X_i \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, q \\ m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q \end{matrix} \right),$$

où α_{0i} ($i = 1, 2, \dots, q$) sont q intégrales distinctes de l'équation (33) et où l'intégrale $\sum_{i=1}^q \zeta_i$ ne s'annule que pour $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, q$). Comme α_0 est une intégrale de l'équation (33), une relation de la forme

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^j f_i(x) \alpha_{0i}, \quad \text{où } f_i(x) \neq 0, \quad (j \leq q)$$

doit exister. L'équation (43) admet par suite une Y -intégrale de rang $r+2$ et q X -intégrales distinctes de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j, m_{j+1} + 1, \dots, m_q + 1$, lesquelles ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur. Je nomme, d'après Darboux, la somme $r + \sum_{i=1}^q m_i$ le nombre caractéristique de l'équation (20). Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant: Lorsque l'une des deux équations (20) et (43) admet n intégrales distinctes de la forme d'Euler, le cas est le même pour l'autre équation, et le nombre caractéristique est le même pour les deux équations.

Proposition 4. Par la transformation

$$z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{\alpha_0} \right), \quad \text{où } \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0; \quad \sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \alpha_0 \neq 0,$$

l'équation (20) est ramenée à l'équation (43), laquelle est du même type et du même ordre que l'équation (20). L'intégration de l'une des équations (20) et (43) entraîne celle de l'autre; de toute intégrale de l'une des équations l'on obtient sans intégration une intégrale de l'autre équation. Si l'une des équations admet s X -intégrales distinctes, le cas est le même pour l'autre équation. — Supposons que l'équation (20) admette s X -intégrales distinctes de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ qui ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur; les s X -intégrales peuvent s'écrire

$$\zeta_i = \alpha_{0i} X_i^{(m_i)} + \alpha_{1i} X_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_{m_i i} X_i \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, s \\ m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_s \end{matrix} \right);$$

s'il n'existe aucune relation de la forme $\alpha_0 = \sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i}$, l'équation (43) admet s X -intégrales distinctes de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur, et s'il existe entre α_0 et α_{0i} ($i = 1, 2, \dots, s$) une relation de la forme

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^j f_i(x) \alpha_{0i}, \quad \text{où } f_j(x) \neq 0, \quad (j \leq s),$$

l'équation (43) admet s X -intégrales distinctes de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j, m_{j+1} + 1, \dots, m_s + 1$ qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de

rang inférieur. — Si l'équation (20) admet une Y -intégrale de rang $r + 1$, l'équation (43) admet une Y -intégrale de rang $r + 2$, et inversement. L'équation (43) ne peut admettre une Y -intégrale de rang 1. — Si l'intégrale générale de l'une des équations (20) et (43) est représentée par n intégrales de la forme d'Euler, le cas est le même pour l'autre équation, et le nombre caractéristique est le même pour les deux équations.

Maintenant nous allons appliquer la transformation (40) à une équation (20) qui admet l'intégrale $\alpha_0 X$. L'équation (20) pouvant s'écrire sous la forme (41) où $\bar{A}_0 = \bar{B}_0 = 0$, la transformation (40) conduit immédiatement à l'équation

$$(45) \quad \sum_{i=1}^q \left(A_i \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} + \bar{B}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \right) \frac{z_1}{\alpha_0} = 0.$$

Supposons que l'équation (20), outre l'intégrale $\alpha_0 X$, admette s X -intégrales distinctes de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$, et supposons que les $s + 1$ X -intégrales ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur. Soient les s X -intégrales de l'équation (20) les intégrales (29); il ne peut exister aucune relation de la forme

$$\sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i} + f(x) \alpha_0 = 0,$$

et l'intégrale $\sum_{i=1}^s \zeta_i + \alpha_0 X$ ne s'annule pour d'autre système de valeurs des fonctions arbitraires que pour $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$), $X = 0$. L'équation (45) admet les s X -intégrales

$$(\zeta_i)_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_{0i}}{\alpha_0} \right) X_i^{(m_i)} + \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_{1i}}{\alpha_0} \right) X_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_{m_i i}}{\alpha_0} \right) X_i \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ au plus. Il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{i=1}^s f_i(x) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_{0i}}{\alpha_0} \right) = 0,$$

et l'intégrale $\sum_{i=1}^s (\zeta_i)_1$ ne s'annule pour d'autre système de valeurs des fonctions arbitraires que pour $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$); il en suit que les s intégrales $(\zeta_i)_1$ ($i = 1, 2, \dots, s$) sont de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ et qu'elles ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur. Si l'équation (20) n'admet que les $s + 1$ X -intégrales ζ_i ($i = 1, 2, \dots, s$) et $\alpha_0 X$, l'équation (45) n'admet que les s X -intégrales $(\zeta_i)_1$ ($i = 1, 2, \dots, s$). De chaque X -intégrale de l'équation (45) on obtient par une quadrature une X -intégrale de l'équation (20).

Supposons que l'équation (20) admette une Y -intégrale de rang $r + 1$. Il en suit que l'équation (45) admet une Y -intégrale qui est de rang $r + 2$ au plus et qui peut être de rang inférieur à $r + 2$. Si l'équation (45) admet une Y -intégrale, il n'en suit nullement qu'il existe une Y -intégrale pour l'équation (20).

Proposition 5. La transformation $z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{\alpha_0} \right)$, appliquée à une équation (20) qui admet l'intégrale $\alpha_0 X$, conduit immédiatement à l'équation (45). Si nous sup-

posons que l'équation (20), outre l'intégrale $\alpha_0 X$, admette s X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ et que les $s + 1$ X -intégrales ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur, il en suit que l'équation (45) admet s X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur, et inversement. Si l'équation (20) admet une Y -intégrale de rang $r + 1$, l'équation (45) admet une Y -intégrale de rang $r + 2$ *au plus*. Mais si l'équation (45) admet une Y -intégrale, il n'en suit nullement qu'il existe une Y -intégrale pour l'équation (20). Si l'intégrale générale de l'équation (20) est représentée par une somme d'intégrales de la forme d'Euler, le cas est le même pour l'équation (45); le nombre caractéristique peut être moindre pour l'équation (45). Mais si l'intégrale générale de l'équation (45) est représentée par des intégrales de la forme d'Euler, il n'en suit nullement que le cas est le même pour l'équation (20).

Des preuves des propositions 4 et 5 il résulte que, si l'équation (20) admet les s X -intégrales (29), la condition nécessaire et suffisante pour que les s X -intégrales (29) de l'équation (20) ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur à $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ est qu'il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{m_i} f_{ji}(x) \alpha_{ji} = 0$$

entre les coefficients $\alpha_{ji} \left(\begin{matrix} j = 0, 1, \dots, m_i \\ i = 1, 2, \dots, s \end{matrix} \right)$.

En appliquant la transformation (40) à l'équation (20), nous avons obtenu des résultats qui sont tout à fait analogues aux résultats obtenus par l'application de la transformation (6) à l'équation (1), et on a le droit de considérer la transformation (40), appliquée à l'équation (20), comme une transformation de Laplace.

Il résulte de la proposition 4 que si l'équation (20) admet une X -intégrale de rang $m + 1$, nous pouvons en appliquant m transformations (t_1) , [voir page 28] convenablement choisies, ramener l'équation (20) à une équation de même type et de même ordre qui admet une X -intégrale de rang 1, et l'ordre de l'équation transformée peut être immédiatement diminué d'une unité. Si l'équation (20) admet s X -intégrales distinctes de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ qui ne peuvent être remplacées par s X -intégrales de rang inférieur, nous pouvons de même en appliquant $\sum_{i=1}^s (m_i + 1)$ transformations (t_1) , convenablement choisies, ramener l'équation (20) à une équation de même type et d'ordre $n - s$. Mais il existe une différence essentielle entre la transformation de Laplace (6)

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az$$

de l'équation (1) et une transformation (t_1) de l'équation (20). La transformation (6) est complètement déterminée, ce qui n'est nullement le cas pour la transformation (t_1) , si $q > 1$; la fonction α_0 dans la transformation

$$z_1 = z_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{z_0} \right)$$

est seulement assujettie à vérifier la relation (33). Comme nous ne connaissons pas d'avance les X -intégrales de l'équation (20) — la méthode de Laplace consiste justement à les déterminer — nous ne pouvons pas définir les transformations (t_1) à l'aide desquelles nous pourrions ramener l'équation (20) à une équation de même type et d'ordre inférieur.

LE ROUX (page 11) a montré que la transformation complètement déterminée $\theta = \varphi_p z$ appliquée à l'équation (16') peut être considérée comme composée de transformations du type

$$\theta_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{\alpha_0} \right), \text{ où } \varphi_p \alpha_0 = 0,$$

et LE ROUX considère la transformation $\theta = \varphi_p z$ comme une transformation de Laplace de l'équation (16').

Pour l'équation (20) l'on trouve facilement que la transformation (21)

$$z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}$$

peut être décomposée en q transformations (t_1) . Supposons que l'on ait décomposée

$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i}{\partial y^i}$ en facteurs différentiels symboliques

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \equiv \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{q-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{q-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0},$$

chaque différentiation portant sur tout ce qui suit, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{q-1}$ étant des fonctions de x et de y . La transformation (21) se décompose en q transformations du premier ordre :

$$z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0}, \quad z_2 = \alpha_0 \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_1}{\alpha_0 \varepsilon_1}, \quad z_3 = \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_2}{\alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2} \text{ etc.}$$

Et comme z_1 est définie par l'équation (43), où

$$\sum_{i=1}^q A_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \frac{1}{\varepsilon_{q-1}} \frac{z_1}{\alpha_0} \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{q-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{q-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_1}{\alpha_0 \varepsilon_1},$$

la transformation $z_2 = \alpha_0 \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_1}{\alpha_0 \varepsilon_1}$ est une transformation (t_1) de l'équation (43). Il

en suit directement que la transformation (21) se décompose en q transformations (t_1) . Je désigne une transformation du type

$$z_2 = \alpha_0 \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0}$$

comme une transformation (t_2) , et, en général, je désigne une transformation du type

$$z_j = \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0} \quad (q \geq j \geq 1)$$

comme une transformation (t_j) de l'équation (20). Je désignerai aussi la transformation complètement déterminée (t_q) comme la transformation (T_1) .

Comme la transformation

$$z_j = \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} z$$

se décompose en j transformations (t_1) , l'équation (20) est ramenée par la transformation (t_j) à une équation de même type et de même ordre au plus. La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation (t_j) conduise à une équation d'ordre $n - s$ est que l'équation (20) admette s X -intégrales distinctes

$$\lambda_i X_i, \text{ où } \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\lambda_i}{\alpha_0} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Nous allons maintenant appliquer la transformation

$$z_j = \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} z$$

à l'équation (20), et nous partons de la supposition que l'équation (20) n'admette pas d'intégrale de la forme

$$\lambda X, \text{ où } \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\lambda}{\alpha_0} = 0.$$

L'équation qui définit z_j est d'ordre n . Comme z peut s'exprimer linéairement à l'aide de z_1 et de dérivées de z_1 (voir l'équation (42)), et que de même z_1 peut s'exprimer linéairement à l'aide de z_2 et de dérivées de z_2 etc., z peut s'exprimer linéairement à l'aide de z_j et de dérivées de z_j . Il en suit que l'équation (20) et l'équation en z_j s'intègrent en même temps; de toute solution de l'une des équations, l'on obtient sans intégration une solution de l'autre équation.

Supposons que l'équation (20) admette les s X -intégrales (29) et qu'elles ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur à $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$; α_{0i} ($i = 1, 2, \dots, s$) sont s intégrales distinctes de l'équation (33), et l'intégrale $\sum_{i=1}^s \xi_i$ ne s'annule que pour $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Supposons ensuite qu'existent les r relations

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^{h_k} f_{ik}(x) \alpha_{0i} \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, r \\ h_1 < h_2 < \dots < h_r \leq s \end{array} \right),$$

où

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\lambda_k}{\alpha_0} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

$$f_{h_k l}(x) \neq 0, \quad f_{h_l l}(x) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, k-1),$$

et que ces r relations soient les seules du type considéré. En effectuant la substitution

$$X_{h_k} = f_{h_k}(x) \bar{X}_{h_k} \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

$$X_i = \bar{X}_i + \sum_{k=1}^r f_{ik}(x) \bar{X}_{h_k}^{m_p - m_i} \quad p = h_k, \quad (i \neq h_1, h_2, \dots, h_r),$$

les r X -intégrales qui correspondent à α_{0h_k} ($k = 1, 2, \dots, r$) seront remplacées par r X -intégrales de même rang qui correspondent à λ_k ($k = 1, 2, \dots, r$). Nous pouvons supposer que la substitution en question ait déjà été effectuée. Ainsi nous avons

$$\lambda_k = \alpha_{0h_k} \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

L'équation par laquelle z_j est définie admet les s X -intégrales

$$(\zeta_i)_j = \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_j - 1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \zeta_i \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Les intégrales $(\zeta_i)_j$ ($i = 1, 2, \dots, s$) sont de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{h_1}, \dots, m_{h_2}, \dots, m_{h_r}, \dots, m_s + 1$ au plus. Comme z peut s'exprimer linéairement à l'aide de z_j et de dérivées de z_j , l'intégrale $\sum_{i=1}^s (\zeta_i)_j$ ne s'annule pour d'autre système de valeurs des fonctions arbitraires que pour $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$), puisque l'intégrale $\sum_{i=1}^s \zeta_i$ ne s'annule que pour $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Nous allons voir qu'aucune relation de la forme

$$\sum_{i=1}^q f_i(x) \alpha_{0i} + \sum_{k=1}^r g_k(x) \alpha_{1h_k} = 0,$$

où α_{0i} ($i = 1, 2, \dots, q$) sont q intégrales distinctes de l'équation (33), ne peut exister. En effet, si une relation de cette forme existait, nous aurions

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \sum_{k=1}^r g_k(x) \alpha_{1h_k} = 0$$

et, en tenant compte de l'équation (44), nous aurions

$$\sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \sum_{k=1}^r g_k(x) \alpha_{0h_k} = 0,$$

ce qui voudrait dire que $\sum_{k=1}^r g_k(x) \alpha_{0h_k} X$ serait une intégrale de l'équation (20), et cela est contraire à l'hypothèse. Il en suit (d'après la proposition 1) que les s X -intégrales $(\zeta_i)_j$ ($i = 1, 2, \dots, s$) sont de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{h_1}, \dots, m_{h_2}, \dots, m_{h_r}, \dots, m_s + 1$ et qu'elles ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur.

Aussi les autres résultats, obtenus pour la transformation (t_1) et qui ont été donnés dans la proposition 4, peuvent facilement être étendus à la transformation (t_j) .

Toutes les transformations $(t_1), (t_2), \dots, (t_q)$ peuvent être considérées comme des transformations de Laplace correspondant au système de caractéristiques $x = \text{const.}$ De ces transformations c'est la transformation (t_q) [aussi désignée (T_1)] qui étant complètement déterminée a le plus grand intérêt pratique.

Je désigne l'équation (20) par la lettre (E) . Par l'application répétée de la transformation (T_1) , on obtient une série d'équations de même type, que je désigne par $(E_1), (E_2), (E_3)$ etc. L'équation adjointe (23) est désignée par (E') ; la transformation (T_1) , appliquée plusieurs fois de suite à l'équation (E') , conduit à une série

d'équations de même type, que je désigne par (E'_1) , (E'_2) , (E'_3) etc. Ces désignations sont identiques à celles que Darboux a employées pour l'équation (1).

L'équation (E_1) peut être obtenue de la manière suivante. En appliquant la transformation (21)

$$z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i},$$

l'équation (20) peut s'écrire

$$(46) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_q \right) z_q = \sum_{i=0}^{q-1} P_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i},$$

où $P_i = \frac{\partial A_i}{\partial x} + A_i B_q - B_i$. Supposons que l'équation (20) admette s , et pas plus de s , X -intégrales distinctes de rang 1, où $0 \leq s < q$. En différentiant l'équation (46) $q-s$ fois par rapport à y et l'équation (21) $q-s-1$ fois par rapport à y et en éliminant entre ces $2(q-s)+1$ équations

$$\frac{\partial^h}{\partial y^h} \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_q \right) z_q = \sum_{i=0}^{h+q-1} p_{ih} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \quad (h = 0, 1, \dots, q-s),$$

$$\frac{\partial^h z_q}{\partial y^h} = \sum_{i=0}^{h+q} a_{ih} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \quad (h = 0, 1, \dots, q-s-1)$$

pour la désignation a_{ih} , p_{ih} voir page 23] les $2(q-s)$ quantités $\frac{\partial^{2q-s-1} z}{\partial y^{2q-s-1}}$, $\frac{\partial^{2q-s-2} z}{\partial y^{2q-s-2}}, \dots, \frac{\partial^s z}{\partial x^s}$, nous obtiendrons l'équation:

$$(46') \quad \begin{vmatrix} p_{q+j-2, j-1} & p_{q+j-3, j-1} & p_{q+j-4, j-1} & \dots & p_{q-j+1, j-1} & \frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_q \right) z_q \\ 0 & p_{q+j-3, j-2} & p_{q+j-4, j-2} & \dots & p_{q-j+1, j-2} & \frac{\partial^{j-2}}{\partial y^{j-2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_q \right) z_q \\ 0 & 0 & p_{q+j-4, j-3} & \dots & p_{q-j+1, j-3} & \frac{\partial^{j-3}}{\partial y^{j-3}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_q \right) z_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & p_{q-j+1, 0} & \frac{\partial z_q}{\partial x} + B_q z_q \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{q-j} P_{ij} \frac{\partial^i z}{\partial y^i},$$

$$\begin{vmatrix} a_{q+j-2, j-2} & a_{q+j-3, j-2} & a_{q+j-4, j-2} & \dots & a_{q-j+1, j-2} & \frac{\partial^{j-2} z_q}{\partial y^{j-2}} \\ 0 & a_{q+j-3, j-3} & a_{q+j-4, j-3} & \dots & a_{q-j+1, j-3} & \frac{\partial^{j-3} z_q}{\partial y^{j-3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{q-j+1, 0} & z_q \end{vmatrix}$$

où $j = q - s + 1$. Comme nous avons supposé que l'équation (20) admette s X -intégrales distinctes de rang 1, nous avons

$$\sum_{i=0}^{q-s+1} P_{i, q-s+1} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \equiv 0.$$

Et l'équation (46'), où $j = q - s + 1$, est justement l'équation (E_1) . L'équation (E_1) est de même type que l'équation (20) et d'ordre $n - s$, résultat déjà obtenu. Supposons $s > 0$. L'équation (20) peut se mettre sous la forme (37), et la transformation (T_1) de l'équation (20) peut être décomposée en deux transformations complètement déterminées, c'est-à-dire

$$z_s = \sum_{i=0}^s \frac{P_{i,q-s}}{P_{s,q-s}} \frac{\partial^i z}{\partial y^i}, \quad z_q = \sum_{i=0}^{q-s} M_i \frac{\partial^i z_s}{\partial y^i};$$

cette dernière transformation est la transformation (T_1) de l'équation

$$\sum_{i=0}^{q-s} \left(M_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + N_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_s = 0.$$

z ne peut s'exprimer au moyen de dérivées de z_q ; mais l'expression $\sum_{i=0}^s P_{i,q-s} \frac{\partial^i z}{\partial y^i}$ est une fonction linéaire et homogène de z_q et de dérivées de z_q , les coefficients étant des fonctions déterminées de x et de y .

Nous pouvons maintenant facilement étendre les résultats obtenus pour la transformation (t_1) et qui ont été donnés dans les propositions 4 et 5 à la transformation (T_1) .

Proposition 6. En appliquant la transformation complètement déterminée (21)

$$z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}$$

à une équation (E) qui n'admet pas de X -intégrale de rang 1, l'on obtient une équation (E_1) de même type et de même ordre. L'intégration des deux équations (E) et (E_1) constitue deux problèmes équivalents; de toute intégrale de l'une des deux équations, l'on obtient sans intégration une solution de l'autre équation. Si l'équation (E) admet s X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur, l'équation (E_1) admet s X -intégrales de rang $m_1, m_2, \dots, m_s$ qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur, et inversement. Si l'équation (E) admet une Y -intégrale de rang $r + 1$, l'équation (E_1) admet une Y -intégrale de rang $r + q + 1$, et inversement. L'équation (E_1) ne peut admettre une Y -intégrale de rang inférieur à $q + 1$. Lorsque l'intégrale générale de l'une des deux équations (E) et (E_1) est représentée par n intégrales distinctes de la forme d'Euler, il en est de même de l'autre équation, et le nombre caractéristique est le même pour les deux équations (E) et (E_1) .

Proposition 7. Si l'on applique la transformation complètement déterminée (21)

$$z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}$$

à une équation (E) qui admet s_1 — et pas plus de s_1 — X -intégrales distinctes de rang 1, l'on obtient une équation (E_1) de même type et d'ordre $n - s_1$. Si

l'équation (E) admet, outre les s_1 X -intégrales de rang 1, s_2 X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{s_2} + 1$ et que les $s_1 + s_2$ X -intégrales ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur, l'équation (E_1) admet s_2 X -intégrales de rang $m_1, m_2, \dots, m_{s_2}$ qui ne peuvent être remplacées par des X intégrales de rang inférieur, et inversement. Si l'équation (E) admet une Y -intégrale de rang $r + 1$, l'équation (E_1) admet une Y -intégrale de rang $r + q + 1$ *au plus*. Mais si l'équation (E_1) admet une Y -intégrale, il n'en suit nullement que l'équation (E) admette une Y -intégrale. Lorsque l'intégrale générale de l'équation (E) est représentée par des intégrales de la forme d'Euler, il en est de même de l'équation (E_1) ; le nombre caractéristique peut être moindre pour l'équation (E_1) . Nous ne pouvons conclure réciproquement que lorsque l'intégrale générale de l'équation (E_1) est représentée par des intégrales de la forme d'Euler, il en soit de même de l'équation (E) .

En appliquant à l'équation (E) la transformation (T_1) plusieurs fois de suite, nous pouvons reconnaître si l'équation (E) admet une X -intégrale. L'application répétée de la transformation (T_1) à l'équation (E) donne une série d'équations de même type $(E_1), (E_2), (E_3)$ etc.; dans cette série chaque équation suivante est de même ordre au plus que l'équation précédente. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (E) admette s X -intégrales distinctes de rang inférieur à $m + 2$ est que l'équation (E_{m+1}) soit d'ordre $n - s$. Supposons que les équations $(E_1), (E_2), \dots, (E_{m_1})$ soient d'ordre n et que l'équation (E_{m_1+1}) soit d'ordre $n - 1$. L'équation (E_{m_1}) admet alors une X -intégrale de rang 1; cette intégrale est obtenue par une quadrature, et de cette intégrale l'on obtient sans intégration une X -intégrale de rang $m_1 + 1$ de l'équation (E) . Pour reconnaître si l'équation (E) admet encore d'autres X -intégrales, nous pouvons répéter la transformation (T_1) , ou, autrement dit, former les équations $(E_{m_1+2}), (E_{m_1+3}), (E_{m_1+4}), \dots$, d'ordre $n - 1$ au plus. Supposons que les équations $(E_{m_1+1}), (E_{m_1+2}), \dots, (E_{m_2})$, soient d'ordre $n - 1$ et que l'équation (E_{m_2+1}) soit d'ordre $n - 2$. Dans ce cas, l'équation (E_{m_2}) admet une X -intégrale de rang 1, qui s'obtient par une quadrature; cette intégrale nous donne sans intégration une X -intégrale de rang $m_2 - m_1$ de l'équation (E_{m_1+1}) et par une quadrature, on obtient une X -intégrale de rang $m_2 - m_1 + 1$ de l'équation (E_{m_1}) ; l'équation (E) admet par suite une X -intégrale de rang $m_2 + 1$, et pour obtenir cette X -intégrale de l'équation (E) , il ne faut que des quadratures. Ainsi nous pouvons continuer. Mais il est à remarquer que si l'ordre de l'équation (E_m) est diminué de s unités ($s > 1$) par l'application de la transformation (T_1) — c'est-à-dire l'ordre de l'équation (E_{m+1}) est moindre de s unités que l'ordre de l'équation (E_m) — et que par suite l'équation (E) admette s X -intégrales distinctes de rang $m + 1$, il faudra intégrer une équation différentielle linéaire d'ordre s pour obtenir les s X -intégrales de rang $m + 1$ et les X -intégrales éventuelles de rang supérieur. Ainsi pour obtenir les X -intégrales de l'équation (E) , il faut l'intégration d'équations différentielles linéaires du premier ordre (ou en cas exceptionnel d'ordre supérieur). Supposons que nous ayons obtenu de cette manière s X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ de l'équation (E) ; les s X -intégrales ne peuvent être remplacées par des X -inté-

grales de rang inférieur. Pour obtenir l'intégrale générale de l'équation (E), il faut encore l'intégration d'une équation du type (20) et d'ordre $n - s$. Nous voyons ainsi que si l'équation (E) admet q X-intégrales distinctes, l'intégration de l'équation (E) peut être ramenée à l'intégration d'équations différentielles linéaires.

Voilà donc une méthode pour obtenir les X-intégrales de l'équation (20). Par l'application de la transformation complètement déterminée (21) m fois de suite à l'équation (20) nous pouvons reconnaître si l'équation admet une X-intégrale de rang inférieur à $m + 1$ et, dans ce cas, ramener la détermination de cette X-intégrale ou de ces X-intégrales à l'intégration d'équations différentielles linéaires. Les résultats reçus en appliquant la transformation de Laplace (21) à l'équation (20) sont tout à fait analogues à ceux obtenus pour la transformation (6), appliquée à l'équation (1).

D'après LE ROUX (voir pages 10, 11), l'équation (20) admet une transformation de Laplace correspondant au système de caractéristiques $y = \text{const.}$, c'est-à-dire la transformation complètement déterminée (21'); c'est la transformation la plus simple qui permette de diminuer le rang de la Y-intégrale, le caractère essentiel d'une transformation de Laplace correspondant à la variable caractéristique y . Mais si l'on applique la transformation (21') à l'équation (20), θ est en général définie par q équations linéaires d'ordre $2q$. Il n'est donc pas commode d'appliquer la transformation (21') pour simplifier l'intégration de l'équation (20). Nous verrons qu'il existe des transformations linéaires par lesquelles l'équation (20) est ramenée à une équation de même type et de même ordre au plus, et qui, appliquées à une équation (20) admettant une Y-intégrale, diminuent le rang de la Y-intégrale de 1, 2, ... q unités respectivement, à savoir les transformations qui sont inverses aux transformations $(t_1), (t_2), \dots (t_q)$. Il est tout naturel d'examiner si ces transformations peuvent être considérées comme des transformations de Laplace à l'équation (20), correspondant au système de caractéristiques $y = \text{const.}$

Supposons que par la transformation (40) l'équation (20) soit ramenée à une équation de même ordre. z_1 est définie par l'équation (43). Par la transformation

$$z = - \frac{\alpha_0}{B_0} \sum_{i=1}^q \left(\bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} + \bar{B}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \right) \frac{z_1}{\alpha_0},$$

l'équation (43) est ramenée à l'équation (20). Nous disons aussi que cette transformation est inverse à la transformation (40).

Maintenant nous allons appliquer la transformation en question à l'équation (20). L'équation (20) peut toujours s'écrire

$$(47) \quad \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[\gamma \sum_{i=0}^{q-1} \left(R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \right] + Tz = 0,$$

où R_i, S_i, T, γ sont des fonctions de x et de y ; $R_{q-1} = 1$. Posons $T \neq 0$, ou, autrement dit, supposons que l'équation adjointe (23) n'admette pas l'intégrale γX . Par la transformation

$$(48) \quad z_{-1} = \sum_{i=0}^{q-1} \left(R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right),$$

l'équation (47) est ramenée à l'équation

$$(49) \quad T \sum_{i=0}^{q-1} \left(R_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \left(\frac{1}{T\gamma} \frac{\partial}{\partial y} (\gamma z_{-1}) \right) + T z_{-1} = 0,$$

qui est du même type et du même ordre que l'équation (20). La transformation (48) est inverse à la transformation

$$z = - \frac{1}{T\gamma} \frac{\partial}{\partial y} (\gamma z_{-1}),$$

qui, à un facteur près, est une transformation (t_1) . La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) puisse se mettre sous la forme (47) où $T \neq 0$ est que l'équation adjointe (23) n'admette pas q X -intégrales distinctes de rang 1, ou, autrement dit, que l'équation (20) n'admette pas une Y -intégrale de rang 1.

Je dénomme la transformation (48) une transformation (t_{-1}) , puisqu'elle est inverse à une transformation qui, à un facteur près, est une transformation (t_1) .

L'intégration de l'une des équations (47) et (49) entraîne celle de l'autre, et les équations admettent le même nombre d'intégrales de la forme d'Euler (d'après la proposition 4).

Supposons que l'équation (20) admette s X -intégrales distinctes de rang $m_1 + 1$, $m_2 + 1$, ..., $m_s + 1$ qui ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur. Soient les s X -intégrales de l'équation (20) les intégrales (29). L'équation (49) admet les s X -intégrales

$$(\zeta_h)_{-1} = \sum_{i=0}^{q-1} \left(R_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \zeta_h \quad (h = 1, 2, \dots, s).$$

α_{0h} ($h = 1, 2, \dots, s$) sont s intégrales distinctes de l'équation

$$(49') \quad \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[\gamma \sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} \right] = 0.$$

Si α_{0h} ($h = 1, 2, \dots, s$) sont des intégrales de l'équation

$$(49'') \quad \sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0,$$

les intégrales $(\zeta_h)_{-1}$ ($h = 1, 2, \dots, s$) sont de rang $m_1 + 1$, $m_2 + 1$, ..., $m_s + 1$ au plus; et il résulte de la proposition 4 que les intégrales $(\zeta_h)_{-1}$ ($h = 1, 2, \dots, s$) sont de rang $m_1 + 1$, $m_2 + 1$, ..., $m_s + 1$ et ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur. Supposons que non toutes les α_{0h} ($h = 1, 2, \dots, s$) soient des intégrales de l'équation (49''); posons

$$\sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_{0j}}{\partial y^i} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j-1), \quad \sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_{0j}}{\partial y^i} \neq 0$$

En appliquant la substitution

$$X_j = \bar{X}_j + \sum_{h=j+1}^s f_h(x) X_h^{(m_h - m_j)},$$

nous remplaçons les $s-j$ intégrales ζ_h ($h = j+1, j+2, \dots, s$) par $s-j$ X -intégrales de même rang qui correspondent à

$$\alpha_{0h} + f_h(x) \alpha_{0j} \quad (h = j+1, j+2, \dots, s).$$

Comme α_{0h} ($h = 1, 2, \dots, s$) sont s intégrales distinctes de l'équation (49') nous pouvons disposer de $f_h(x)$ ($h = j+1, j+2, \dots, s$) de telle manière que

$$\alpha_{0h} + f_h(x) \alpha_{0j} \quad (h = j+1, j+2, \dots, s)$$

seront des intégrales de l'équation (49''). Supposons que la substitution en question ait déjà été appliquée. Nous avons ainsi

$$\sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_{0h}}{\partial y^i} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, s), \quad \sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_{0j}}{\partial y^i} \neq 0.$$

Les intégrales $(\zeta_h)_{-1}$ ($h = 1, 2, \dots, s$) sont de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j + 2, m_{j+1} + 1, \dots, m_s + 1$ au plus; et il suit de la proposition 4 qu'elles sont de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j + 2, m_{j+1} + 1, \dots, m_s + 1$ et qu'elles ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur.

De la proposition 4 il résulte directement que si l'équation (20) admet une Y -intégrale de rang $r+1$, l'équation (49) admet une Y -intégrale de rang r . La transformation en question peut ainsi être appliquée à une équation (20) qui admet une Y -intégrale de rang supérieur à 1 pour ramener celle-ci à une équation de même type et de même ordre qui admet une Y -intégrale de rang 1. Mais la transformation (t_{-1}) n'est évidemment pas complètement déterminée, si $q > 1$, pas plus que la transformation (t_1) .

Proposition 8. Lorsque l'équation (20) n'admet pas une Y -intégrale de rang 1, l'équation peut s'écrire

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[\gamma \sum_{i=0}^{q-1} \left(R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \right] + Tz = 0; \quad T \neq 0; \quad R_{q-1} = 1.$$

La transformation

$$z_{-1} = \sum_{i=0}^{q-1} \left(R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right)$$

conduit à l'équation (49)

$$T \sum_{i=0}^{q-1} \left(R_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \left(\frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial y} (\gamma z_{-1}) \right) + T z_{-1} = 0.$$

La transformation en question est inverse à la transformation

$$z = -\frac{1}{T_1} \frac{\partial}{\partial y} (\gamma z - 1),$$

qui, à un facteur près, est une transformation (t_1). L'intégration de l'une des équations (49) et (20) entraîne celle de l'autre; les équations (20) et (49) admettent le même nombre d'intégrales distinctes de la forme d'Euler. — Supposons que l'équation (20) admette s X -intégrales distinctes de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ qui ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur. Soient les s X -intégrales de l'équation (20) les intégrales (29); si α_{0h} ($h = 1, 2, \dots, s$) sont s intégrales de l'équation

$$\sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0,$$

l'équation (49) admet s X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur, et si

$$\sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_{0h}}{\partial y^i} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j-1), \quad \sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_{0j}}{\partial y^i} \neq 0,$$

l'équation (49) admet s X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j + 2, m_{j+1} + 1, \dots, m_s + 1$ qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur. — Si l'équation (20) admet une Y -intégrale de rang $r + 1$, l'équation (49) admet une Y -intégrale de rang r , et inversement. (Comparer en outre la proposition 4).

Nous savons que, pour l'équation (1), ce fait notable a lieu: Si l'on applique la transformation (6) à l'équation (1) et la transformation

$$\bar{u} - 1 = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - bu \right), \quad \text{où } h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c,$$

à l'équation adjointe (14), l'on obtient deux équations qui sont encore adjointes. Nous allons maintenant prouver que le cas analogue a lieu pour l'équation (20).

Nous avons trouvé (pages 28, 29) que la transformation (40) appliquée à l'équation (20) conduit à l'équation (43), pourvu que $\bar{B}_0 \neq 0$. Comme l'équation (20) peut s'écrire

$$\alpha_0 \sum_{i=1}^q \left(\bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} + \bar{B}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \alpha_0 + B_0 \alpha_0 = 0,$$

l'équation adjointe (23) peut s'écrire

$$\frac{1}{\alpha_0} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^q (-1)^{i+1} \left[\frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} (\bar{A}_i \alpha_0 u) - \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} (\bar{B}_i \alpha_0 u) \right] + B_0 u = 0.$$

L'adjointe de l'équation (43) peut s'écrire

$$(50) \quad \frac{1}{\alpha_0} \sum_{i=1}^q (-1)^{i+1} \left[\frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} \left(\frac{\bar{A}_i}{B_0} \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_0 \bar{B}_0 u - 1) \right) - \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \left(\frac{\bar{B}_i}{B_0} \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_0 \bar{B}_0 u - 1) \right) \right] + B_0 u - 1 = 0.$$

Nous voyons ainsi que par la transformation

$$u = \frac{1}{\alpha_0 \bar{B}_0} \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_0 \bar{B}_0 u_{-1}),$$

qui est une transformation (t_1) , l'équation (50) est ramenée à l'équation (23) et que par la transformation

$$(50') \quad u_{-1} = -\frac{1}{\alpha_0 \bar{B}_0} \sum_{i=1}^q (-1)^{i+1} \left[\frac{\partial^i}{\partial x \partial y^i} (\bar{A}_i \alpha_0 u) - \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} (\bar{B}_i \alpha_0 u) \right],$$

qui est une transformation (t_{-1}) , à un facteur près, l'équation (23) est ramenée à l'équation (50). Cela nous montre que si l'équation (20) est ramenée par une transformation (t_1) [(t_{-1}) respectivement] à une équation de même ordre, il existe toujours une transformation (t_1) [(t_{-1}) respectivement] par laquelle l'adjointe de l'équation transformée est ramenée à l'équation (23).

Nous verrons que des résultats analogues seront obtenus, si l'on applique une transformation (t_2) à l'équation (20). Nous pouvons écrire [voir page 35]

$$\alpha_0 \sum_{i=1}^q \bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \frac{z}{\alpha_0} \equiv \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{q-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{q-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0}.$$

Appliquons maintenant la transformation

$$z_2 = \alpha_0 \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0}$$

à l'équation (20), ou, autrement dit, la transformation

$$z_2 = \alpha_0 \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_1}{\alpha_0 \varepsilon_1}$$

à l'équation (43). L'équation (43) peut se mettre sous la forme

$$\alpha_0 \varepsilon_1 \sum_{i=1}^q \left(\bar{A}_{i1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + \bar{B}_{i1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \frac{z_1}{\alpha_0 \varepsilon_1} + \bar{B}_{01} z_1 = 0,$$

où

$$\alpha_0 \varepsilon_1 \sum_{i=1}^q \bar{A}_{i1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \frac{z_1}{\alpha_0 \varepsilon_1} \equiv \alpha_0 \bar{B}_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{q-1}}{\bar{B}_0} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{q-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_1}{\alpha_0 \varepsilon_1}.$$

Si $\bar{B}_{01} \neq 0$, z_2 est définie par une équation qui peut s'écrire

$$\alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum_{i=1}^q \left(\bar{A}_{i2} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + \bar{B}_{i2} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \frac{z_2}{\alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2} + \bar{B}_{02} z_2 = 0,$$

où

$$\alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum_{i=1}^q \bar{A}_{i2} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \frac{z_2}{\alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2} \equiv \alpha_0 \varepsilon_1 \bar{B}_{01} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\bar{B}_0}{\varepsilon_1 \bar{B}_{01}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{q-1}}{\bar{B}_0} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{q-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_2}{\alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2},$$

Désignons l'intégrale de l'adjointe de cette dernière équation par u_{-2} . Nous aurons alors

$$u_{-1} = \frac{1}{\alpha_0 \varepsilon_1 \bar{B}_{01}} \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_0 \varepsilon_1 \bar{B}_{01} u_{-2}),$$

et comme

$$u = \frac{1}{\alpha_0 \bar{B}_0} \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_0 \bar{B}_0 u_{-1}),$$

nous obtiendrons

$$u = \frac{1}{\alpha_0 \bar{B}_0} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\bar{B}_0}{\varepsilon_1 \bar{B}_{01}} \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_0 \varepsilon_1 \bar{B}_{01} u_{-2}),$$

qui est une transformation (t_2) . Nous avons ainsi reçu le résultat suivant: Si l'équation (20) est ramenée, par la transformation

$$z_2 = \alpha_0 \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} z,$$

à une équation de même ordre, l'adjointe de cette dernière équation sera ramenée à l'équation (23) par la transformation

$$u = \frac{1}{\alpha_0 \bar{B}_0} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\bar{B}_0}{\varepsilon_1 \bar{B}_{01}} \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_0 \varepsilon_1 \bar{B}_{01} u_{-2}),$$

qui est une transformation (t_2) .

Nous pourrions continuer de cette manière en appliquant une transformation (t_3) , (t_4) etc. à l'équation (20), et nous obtiendrons des résultats analogues.

Proposition 9. Lorsque l'équation (20) est ramenée à une équation de même ordre par une transformation (t_i) , il existe aussi une transformation (t_i) par laquelle l'adjointe de l'équation transformée est ramenée à l'équation (23); la proposition est valable pour $i = 1, 2, \dots, q$ et pour $i = -1$.

Nous allons maintenant tirer quelques conclusions des propositions 8 et 9. Si nous supposons que l'équation (20) admette q X -intégrales distinctes de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$ qui ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur, l'équation (20) peut être transformée, par l'application de $\sum_{i=1}^q m_i$ transformations (t_1) convenablement choisies, à une équation de même type et de même ordre qui admet q X -intégrales distinctes de rang 1; l'adjointe de cette dernière équation admet par suite une Y -intégrale de rang 1; d'après la proposition 9 cette équation adjointe peut être transformée à l'équation (23) par l'application de $\sum_{i=1}^q m_i$ transformations (t_1) convenablement choisies; ainsi l'équation (23) admet une Y -intégrale de rang $\sum_{i=1}^q m_i + 1$. — Inversement, si nous supposons que l'équation (23) admette une Y -intégrale de rang $r + 1$, nous pourrions en appliquant r transformations (t_{-1}) convenablement choisies ramener l'équation (23) à une équation de même type et de

même ordre qui admet une Y -intégrale de rang 1; l'adjointe de cette dernière équation admet q X -intégrales distinctes de rang 1; d'après la proposition 9, cette équation adjointe peut être transformée à l'équation (20) par l'application de r transformations (t_{-1}) convenablement choisies; ainsi l'équation (20) admet q X -intégrales distinctes, et si les X -intégrales sont écrites sous une telle forme qu'elles ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur, la somme de leur rang est $r + q$.

Proposition 10. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une Y -intégrale est que l'équation adjointe (23) admette q X -intégrales distinctes. Si l'équation (23) admet q X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$ qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur, l'équation (20) admet une Y -intégrale de rang $\sum_{i=1}^q m_i + 1$. Et réciproquement, lorsque l'équation (20) admet une Y -intégrale de rang $r + 1$, l'équation (23) admet q X -intégrales distinctes et, si les X -intégrales sont écrites sous une telle forme qu'elles ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur, la somme de leur rang est $r + q$.

Par là est donnée une méthode pour reconnaître si l'équation (20) admet une Y -intégrale. Nous pouvons partir de l'équation adjointe (23) et examiner si cette équation admet q X -intégrales distinctes. De cette manière nous pouvons reconnaître si l'équation (20) admet une Y -intégrale, mais nous n'avons pas avec cela obtenu l' Y -intégrale, lorsque l'équation en admet une. Nous allons maintenant étudier les transformations inverses à $(t_1), (t_2), \dots, (t_q)$, rechercher à quel point ces transformations nous permettent de simplifier l'intégration de l'équation (20) et examiner si nous pouvons, par l'application de ces transformations, déterminer l' Y -intégrale de l'équation (20), lorsque l'équation en admet une.

La transformation

$$(51) \quad z_j = \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0} = \eta(z)$$

est une transformation (t_j) de l'équation (20)

$$\sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) = 0, \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{q-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{q-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0}$$

[voir page 35]. Supposons maintenant que la transformation (51) conduise à une équation d'ordre n , ou autrement dit, que l'équation (20) n'admette pas d'intégrale de la forme λX , où $g(\lambda) = 0$. Nous avons déjà vu que z peut s'exprimer linéairement à l'aide de z_j et de dérivées de z_j . Cela résulte aussi de ce qui suit. L'équation (20) peut s'écrire

$$(52) \quad \sum_{i=0}^{q-j} \left(M_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + N_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_i + \sum_{i=0}^j L_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0,$$

où $z_j = g(z)$; M_i , N_i , L_i étant des fonctions déterminées de x et de y . En différenciant l'équation (52) $j-1$ fois par rapport à y et l'équation (51) $j-2$ fois par rapport à y et en éliminant entre ces $2j-1$ équations les $2(j-1)$ quantités $\frac{\partial^{2(j-1)} z}{\partial y^{2(j-1)}}$, $\frac{\partial^{2j-3} z}{\partial y^{2j-3}}$, $\dots$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, nous obtiendrons une équation de la forme

$$vz = \sum_{i=0}^{q-1} \left(V_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + W_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_j,$$

V_i , W_i et v étant des fonctions de x et de y ; en divisant par un facteur on peut ajouter la condition non essentielle que le coefficient de la plus haute dérivée de z_j qui se trouve dans la relation obtenue sera égal à 1. Comme nous avons supposé que z soit définie par une équation d'ordre n , nous aurons $v \neq 0$. Je nomme la transformation

$$\bar{z} = \sum_{i=0}^{q-1} \left(V_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + W_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_j,$$

laquelle, à un facteur près, est inverse à une transformation (t_j) , une transformation (t_{-j}) de l'équation qui définit z_j .

Une transformation (t_{-j}) ($q \geq j \geq 1$) de l'équation (20) doit par suite être de la forme

$$(53) \quad z_{-j} = \sum_{i=0}^{q-j} \left(T_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z.$$

T_i et U_i étant des fonctions de x et de y . Il résulte de la proposition 9 et de la définition de la transformation (t_{-j}) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une transformation (t_{-j}) à l'équation (20) est que l'équation adjointe (23) admette une transformation (t_j) par laquelle l'équation (23) est ramenée à une équation de même ordre. Et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une transformation (t_j) par laquelle l'équation (23) est ramenée à une équation de même ordre est que l'équation (23) admette au plus $q-j$ X-intégrales distinctes de rang 1. Avec la définition que j'ai donnée pour la transformation (t_{-j}) , la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une transformation (t_{-j}) est ainsi que l'équation adjointe admette au plus $q-j$ X-intégrales distinctes de rang 1.

Maintenant nous allons définir les coefficients T_i et U_i de l'équation (53) en fonction des coefficients de l'équation (20); nous partons de ce que l'équation (23) admet au plus $q-j$ X-intégrales distinctes de rang 1. Comme la transformation (53) est inverse à une transformation (t_j) , à un facteur près, il existe une relation de la forme

$$(54) \quad \sum_{k=0}^j F_k \frac{\partial^k z_{-j}}{\partial y^k} = \mu z \quad (F_j = 1; \mu \neq 0),$$

F_k, μ étant des fonctions de x et de y . Il en suit qu'il existe une identité de la forme

$$(54') \quad \sum_{k=0}^j F_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=0}^{q-1} \left(T_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z \equiv \sum_{k=0}^{j-1} G_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z + \mu z,$$

G_k étant des fonctions de x et de y . L'identité en question peut s'écrire

$$(54'') \quad \begin{aligned} \sum_{k=0}^j F_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} &\equiv \sum_{k=0}^{j-1} G_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}, \\ \sum_{k=0}^j F_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=0}^{q-1} U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} &\equiv \sum_{k=0}^{j-1} G_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=0}^q B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} + \mu z. \end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une identité de la forme (54'') ait lieu est que l'équation (33) et l'équation

$$(54''') \quad \sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^i z_0}{\partial y^i} = 0$$

admettent $q - j$ intégrales distinctes communes. Les q coefficients T_i ($i = 0, 1, \dots, q - 1$) doivent par suite remplir les $q - j$ conditions nécessaires et suffisantes pour cela. Nous avons déjà vu (pages 23, 24) comment l'on obtient ces $q - j$ conditions. Il va de soi que l'équation (54''') est au moins d'ordre $q - j$. Nous voyons aussi immédiatement que si l'équation (54''') est d'ordre $q - s$, nous avons $U_i = 0$ ($i = q - 1, q - 2, \dots, q - s + 1$).

Avant d'examiner quelles conditions les coefficients T_i, U_i ($i = 0, 1, \dots, q - 1$) doivent encore vérifier pour que l'identité (54') ait lieu, nous écrirons la transformation (53) sous une forme un peu modifiée.

Nous allons employer la désignation

$$\mathcal{E}_k(z) \equiv \sum_{i=k}^q (-1)^{q-i} \left[\frac{\partial^{i+1-k}}{\partial x \partial y^{i-k}} (C_i z) - \frac{\partial^{i-k}}{\partial y^{i-k}} (D_i z) \right], \quad (k = 0, 1, \dots, q)$$

les coefficients C_i et D_i étant définies par les équations (38'). D'après cette désignation l'équation (20) s'écrit $\mathcal{E}_0(z) = 0$. En différentiant par rapport à y nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{E}_k(z) &\equiv \mathcal{E}_{k-1}(z) + (-1)^{q-k} \left[\frac{\partial}{\partial x} (C_{k-1} z) - D_{k-1} z \right] \\ &\equiv \mathcal{E}_{k-1}(z) + (-1)^{q-k} [C_{k-1} \mathcal{E}_q(z) + Q_{k-1} z] \quad (k = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

où $Q_i = \frac{\partial C_i}{\partial x} + C_i D_q - D_i$ [voir page 26].

La plus haute dérivée de z dans l'expression $\mathcal{E}_i(z)$ étant toujours $\frac{\partial^{q+1-i} z}{\partial x \partial y^{q-i}}$, la transformation (53) peut s'écrire

$$(55) \quad z^{-j} = \sum_{i=0}^{q+1} \left(T_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \equiv \sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{S}_i(z) + \sum_{i=1}^q d_i \frac{\partial^{q-i} z}{\partial y^{q-i}},$$

c_i et d_i étant des fonctions de x et de y . En différentiant par rapport à y nous obtenons

$$\frac{\partial z^{-j}}{\partial y} = \sum_{i=1}^q c'_i \mathfrak{S}_i(z) + \sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{S}_{i-1}(z) + \sum_{i=1}^q (-1)^{q-i} c_i [C_{i-1} \mathfrak{S}_q(z) + Q_{i-1} z] + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^q d_i \frac{\partial^{q-i} z}{\partial y^{q-i}},$$

où la désignation $c'_i = \frac{\partial c_i}{\partial y}$ est employée. En introduisant les coefficients c_{q+1} et d_{q+1} définis par l'identité

$$\sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{q-i} c_i [C_{i-1} \mathfrak{S}_q(z) + Q_{i-1} z] \equiv d_{q+1} z,$$

nous obtiendrons

$$\frac{\partial z^{-j}}{\partial y} = \sum_{i=1}^q (c'_i + c_{i+1}) \mathfrak{S}_i(z) + d_{q+1} z + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^q d_i \frac{\partial^{q-i} z}{\partial y^{q-i}},$$

puisque $\mathfrak{S}_0(z) = 0$. De même, nous obtiendrons en introduisant les coefficients c_i , d_i ($i = q+1, q+2, \dots, q+j$) définis par les j identités

$$\sum_{i=1}^{q+1} \left[(-1)^{q-i} \sum_{h=0}^k \frac{k!}{h! (k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} [C_{i-1} \mathfrak{S}_q(z) + Q_{i-1} z] \right] \equiv d_{q+k+1} z \quad (k = 0, 1, \dots, j-1)$$

les j équations

$$\frac{\partial^k z^{-j}}{\partial y^k} = \sum_{i=1}^q \sum_{h=0}^k \frac{k!}{h! (k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} \mathfrak{S}_i(z) + \sum_{h=0}^{k-1} \frac{\partial^h}{\partial y^h} (d_{q+k-h} z) + \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=1}^q d_i \frac{\partial^{q-i} z}{\partial y^{q-i}},$$

$$(k = 1, 2, \dots, j)$$

la désignation $c_i^{(h)} = \frac{\partial^h c_i}{\partial y^h}$ est employée ici. En substituant les expressions obtenues de $\frac{\partial^k z^{-j}}{\partial y^k}$ ($k = 0, 1, \dots, j$) dans l'équation (54), nous aurons

$$(55') \quad \sum_{k=0}^j \left[F_k \sum_{i=1}^q \sum_{h=0}^k \frac{k!}{h! (k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} \mathfrak{S}_i(z) \right] + \sum_{k=1}^j \left[F_k \sum_{h=0}^{k-1} \frac{\partial^h}{\partial y^h} (d_{q+k-h} z) \right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^j F_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=1}^q d_i \frac{\partial^{q-i} z}{\partial y^{q-i}} = 0 \quad (F_j = 1; \quad p \neq 0).$$

Une condition nécessaire pour que la transformation (55) soit une transformation (t_{-j}) est que l'équation (55') se réduise à une identité. Nous allons maintenant examiner quelles relations doivent vérifier les coefficients c_i , d_i ($i = 1, 2, \dots, q+j$), pour qu'une identité de la forme (55') ait lieu, quand l'identité (54'') est supposée. Comme l'identité (54'') a lieu, l'équation (55') ne peut contenir des dérivées de z par rapport à x , et la condition nécessaire et suffisante pour cela est que tous les coefficients

de $\mathcal{S}_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, q$) dans l'équation (55') soient nuls. De l'identité (54'') il résulte donc que l'équation (55') se réduise à l'équation

$$(55'') \quad \sum_{k=1}^j \left(F_k \sum_{h=0}^{k-1} \frac{\partial^h}{\partial y^h} (d_{q+k-h} z) \right) + \sum_{k=0}^j F_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=1}^q d_i \frac{\partial^{q-i} z}{\partial y^{q-i}} = \mu z \quad (F_j = 1; \mu \neq 0).$$

Nous voyons immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (55'') se réduise à une identité est que l'on ait $d_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, q+j-1$), $d_{q+j} = \mu$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) et l'équation (55)

$$z_{-j} = \sum_{i=0}^q \left(T_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z \equiv \sum_{i=1}^q c_i \mathcal{S}_i(z) + \sum_{i=1}^q d_i \frac{\partial^{q-i} z}{\partial y^{q-i}}$$

nous donnent une relation de la forme (54) est ainsi que les équations (33) et (54''') admettent $q-j$ intégrales distinctes communes et que l'on ait $d_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, q+j-1$), $d_{q+j} \neq 0$. L'équation qui définit z_{-j} peut être obtenue de la manière suivante. L'élimination des $j-1$ quantités $\mathcal{S}_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, j-1$) entre les équations

$$\frac{\partial^k z}{\partial y^k} = \sum_{i=1}^q \sum_{h=0}^k \frac{k!}{(k-h)! h!} c_{i,h}^{(k)} \mathcal{S}_i(z) \quad (k = 0, 1, \dots, j-1)$$

conduit à une équation de la forme

$$\sum_{i=j}^q \lambda_i \mathcal{S}_i(z) = \sum_{k=0}^j \nu_k \frac{\partial^k z_{-j}}{\partial y^k},$$

λ_i et ν_k étant des fonctions de x et de y . Si nous substituons

$$z = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^j F_k \frac{\partial^k z_{-j}}{\partial y^k}$$

dans cette équation, nous obtiendrons une équation en z_{-j} qui est du même type que l'équation (20). Nous voyons immédiatement que la transformation

$$\mu z = \sum_{k=0}^j F_k \frac{\partial^k z_{-j}}{\partial y^k}$$

est (au facteur μ près) une transformation (t_j).

La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation (55) soit (à un facteur près) une transformation (t_j) à l'équation (20) est ainsi que les équations (33) et (54''') admettent $q-j$ intégrales distinctes communes et que l'on ait

$$d_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q+j-1), \quad d_{q+j} \neq 0.$$

La transformation (t_{-j}) est ainsi de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=1}^q c_i \mathcal{S}_i(z).$$

Nous allons maintenant examiner ce qu'expriment les conditions $d_i = 0$ ($i = q+1, q+2, \dots, q+j-1$), $d_{q+j} \neq 0$. Les conditions $d_i = 0$ ($i = q+1, q+2, \dots, q+j-1$) nous donnent les $j-1$ identités

$$(56) \quad \sum_{i=1}^{q+1} \sum_{h=0}^k (-1)^{q-i} \frac{k!}{h! (k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} [C_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i-1} z] \equiv 0 \quad (k=0, 1, \dots, j-2)$$

[voir page 50]. De ces $j-1$ identités on peut déduire les $j-2$ identités suivantes :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{q+1} \sum_{h=0}^k (-1)^{q-i} \frac{k!}{h! (k-h)!} \left[c_{i+h}^{(k-h+1)} [C_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i-1} z] + c_{i+h}^{(k-h)} [C'_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q'_{i-1} z] \right] - \\ & - \sum_{i=1}^{q+1} \sum_{h=0}^{k+1} (-1)^{q-i} \frac{(k+1)!}{h! (k+1-h)!} c_{i+h}^{(k+1-h)} [C_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i-1} z] \equiv 0, \quad (k=0, 1, \dots, j-3) \end{aligned}$$

la désignation $C'_i = \frac{\partial C_i}{\partial y}$ et $Q'_i = \frac{\partial Q_i}{\partial y}$ étant employée. Il en résulte

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{q+1} \sum_{h=0}^k (-1)^{q-i} \frac{k!}{h! (k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} [C'_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q'_{i-1} z] - \\ & - \sum_{i=1}^{q+1} \sum_{h=0}^{k+1} (-1)^{q-i} \frac{k!}{(h-1)! (k-h+1)!} c_{i+h}^{(k-h+1)} [C_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i-1} z] \equiv 0 \quad (k=0, 1, \dots, j-3); \end{aligned}$$

cette identité peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{q+1} \sum_{h=0}^k (-1)^{q-i} \frac{k!}{h! (k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} [C'_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q'_{i-1} z] + \\ & + \sum_{i=2}^{q+2} \sum_{h=0}^k (-1)^{q-i} \frac{k!}{h! (k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} [C_{i-2} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i-2} z] \equiv 0 \end{aligned}$$

et ainsi

$$\sum_{i=1}^{q+2} \sum_{h=0}^k (-1)^{q-i} \frac{k!}{h! (k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} [(C'_{i-1} + C_{i-2}) \mathcal{E}_q(z) + (Q'_{i-1} + Q_{i-2}) z] \equiv 0,$$

où $C_i = Q_i = 0$ pour $i > q$ et pour $i < 0$. Les identités (56) peuvent par suite être remplacées par les identités

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{q+2} \sum_{h=0}^k (-1)^{q-i} \frac{k!}{h! (k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} [(C'_{i-1} + C_{i-2}) \mathcal{E}_q(z) + (Q'_{i-1} + Q_{i-2}) z] \equiv 0, \\ & (k=0, 1, \dots, j-3) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{q-i} c_i [C_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i-1} z] \equiv 0.$$

En continuant de cette manière, nous trouvons que les $j-1$ identités (56) peuvent être remplacées par les $j-1$ identités :

$$\sum_{i=1}^{q+k+1} (-1)^{q-i} \left[c_i \sum_{h=0}^k \frac{k!}{h! (k-h)!} [C_{i+h-k-1}^{(h)} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i+h-k-1}^{(h)} z] \right] \equiv 0, \quad (k=0, 1, \dots, j-2)$$

la désignation $C_i^{(h)} = \frac{\partial^h C_i}{\partial y^h}$ et $Q_i^{(h)} = \frac{\partial^h Q_i}{\partial y^h}$ étant employée. De ces $j-1$ identités on obtient les $2(j-1)$ équations

$$(56') \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^{q+h} (-1)^i \left[c_{i+1} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} C_{i+k-h}^{(k)} \right] = 0, \\ \sum_{i=0}^{q+h-1} (-1)^i \left[c_{i+1} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} Q_{i+k-h}^{(k)} \right] = 0. \end{cases} \quad (h = 0, 1, \dots, j-2)$$

Le système d'équations (56') se compose de $2(j-1)$ relations linéaires et homogènes entre les $q+j-1$ coefficients c_i ($i = 1, 2, \dots, q+j-1$). Comme nous sommes partis de la supposition que l'équation adjointe (23) admette au plus $q-j$ X-intégrales distinctes de rang 1, les relations (56') nous donnent $j-1$ relations distinctes entre les coefficients c_i ($i = 1, 2, \dots, q$). En éliminant les $j-1$ quantités c_i ($i = q+1, q+2, \dots, q+j-1$) entre les équations (56'), nous obtenons les $j-1$ équations

$$(56'') \quad \sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i c_{i+1} Q_{ih} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j-1),$$

ce qui résulte de la définition de Q_{ih} [voir page 26]. En partant des équations (56') nous obtenons aussi les équations

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i [c_{i+2} + c'_{i+1}] Q_{ih} &= 0, & (h = 1, 2, \dots, j-2) \\ \sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i (c_{i+3} + 2c'_{i+2} + c''_{i+1}) Q_{ih} &= 0 & (h = 1, 2, \dots, j-3) \end{aligned}$$

etc. Il en résulte

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{q-h+1} (-1)^i c_{i+1} (Q'_{ih} + Q_{i-1,h}) &= 0, & (h = 1, 2, \dots, j-2) \\ \sum_{i=0}^{q-h+2} (-1)^i c_{i+1} (Q''_{ih} + 2Q'_{i-1,h} + Q_{i-2,h}) &= 0 & (h = 1, 2, \dots, j-3) \end{aligned}$$

etc. où $Q_{ih} = 0$ pour $i > q-h$ et pour $i < 0$. Si

$$Q_{q-h,h} \neq 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j-2),$$

le système d'équations (56'') se compose de $j-1$ relations linéaires et homogènes distinctes entre les coefficients c_i ($i = 1, 2, \dots, q$). Si

$$Q_{q-h,h} \neq 0 \quad (h = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, j-2), \quad Q_{q-s,s} = 0 \quad (s \leq j-2),$$

le système d'équations (56'') se compose de $j-2$ relations linéaires et homogènes distinctes entre les coefficients c_i ($i = 1, 2, \dots, q$), car les équations

$$\sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i c_{i+1} Q_{ih} = 0 \quad (h = s, s+1)$$

sont, à un facteur près, identiques; mais aussi dans ce cas le système d'équations (56') nous donne $j-1$ relations linéaires et homogènes entre les coefficients c_i ($i = 1, 2, \dots, q$), c'est-à-dire les équations

$$\sum_{i=0}^{q-j} (-1)^i c_{i+1} Q_{ih} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, s, s+2, \dots, j-1),$$

$$\sum_{i=0}^{q-s} (-1)^i c_{i+1} (Q'_{is} + Q_{i-1,s}) = 0.$$

Si encore

$$Q_{q-h,h} = 0 \quad (h = s, s+1, \dots, s+r-1), \quad Q_{q-k,k} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, j-2),$$

$$(s+r-1 \leq j-2)$$

le système d'équations (56') nous donne de même $j-1$ relations linéaires et homogènes distinctes entre les coefficients c_i ($i = 1, 2, \dots, q$), c'est-à-dire les $j-1$ équations

$$(56''') \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=0}^{q-n} (-1)^i c_{i+1} Q_{ih} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, j-1) \\ &\left| \sum_{i=0}^{q-s+h-r} (-1)^i c_{i+1} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k!(h-k)!} Q_{i+k-h,s}^{(k)} \right| = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, r). \end{aligned} \right.$$

— La condition $d_{q+j} \neq 0$ et les relations (56') nous donnent de même la condition

$$(56''') \quad \sum_{i=0}^{q+j-1} (-1)^i \left| c_{i+1} \sum_{k=0}^j \frac{h!}{k!(h-k)!} Q_{i+k-h}^{(k)} \right| \neq 0 \quad (h = j-1).$$

L'équation adjointe (23) admettant au plus $q-j$ X -intégrales distinctes de rang 1, cette inégalité n'est pas contraire au système d'équations (56'). De cette inégalité et du système d'équations (56') est obtenue la condition

$$\sum_{i=0}^{q-j} (-1)^i c_{i+1} Q_{ij} \neq 0, \text{ si } Q_{q-j+1,j-1} \neq 0,$$

et la condition

$$\sum_{i=0}^{q-j+1} (-1)^i c_{i+1} (Q'_{i,j-1} + Q_{i-1,j-1}) \neq 0, \text{ si } \begin{cases} Q_{q-j+1,j-1} = 0 \\ Q_{q-j+2,j-2} \neq 0 \end{cases}$$

etc.

La transformation (t_{-j}) peut par suite être définie de la manière suivante: Une transformation (t_{-j}) à l'équation (20) peut s'écrire

$$z = \sum_{i=1}^j c_i S_i(z) = \sum_{i=0}^1 \left(T_i \frac{c^{i+1} z}{c^i x^i y^i} + U_i \frac{c^i z}{c^i y^i} \right),$$

où les équations

$$\sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0$$

admettent $q - j$ intégrales distinctes communes, les coefficients c_i ($i = 1, 2, \dots, q$) satisfont à $j - 1$ équations linéaires et homogènes qui sont obtenues du système d'équations (56'), les coefficients c_i ($i = 1, 2, \dots, q$) sont choisis d'une telle manière que l'inégalité (56''') a lieu; de plus, cette condition non essentielle peut être ajoutée que le coefficient de la plus haute dérivée de z qui se trouve dans la transformation doit être égal à 1.

J'ai déjà défini la transformation (t_{-1}) (voir page 42); il résulte directement que les deux définitions coïncident.

Toutes les transformations (t_{-j}) ($j = 1, 2, \dots, q$) peuvent être considérées comme des transformations de Laplace à l'équation (20). La transformation (t_{-j}) ($1 \leq j < q$) n'est pas complètement déterminée. En déterminant quelles sont les $q - j$ intégrales communes des équations

$$\sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0,$$

la transformation devient complètement déterminée.

J'ai montré auparavant (voir page 44, 45) que si la transformation (40) est appliquée à l'équation (20) et que la transformation (50') soit appliquée à l'équation adjointe (23), l'on obtient deux équations qui sont aussi adjointes; nous sommes partis de la supposition $\bar{B}_0 \neq 0$. Je nomme pour abréger les deux transformations (40) et (50') des «transformations adjointes». — Et en général, si par la transformation (51)

$$z_j = \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_j - 1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0} \equiv g(z)$$

l'équation (20) est ramenée à une équation de même ordre, il existe (selon la proposition 9) une transformation, qui, à un facteur près, est une transformation (t_{-j}) , par laquelle l'équation (23) est ramenée à l'adjointe de l'équation qui définit z_j ; les deux transformations de Laplace par lesquelles les équations adjointes sont ramenées à des équations adjointes, seront toujours nommées des «transformations adjointes». — Soient α_{0i} ($i = 1, 2, \dots, j$) j intégrales distinctes de l'équation $g(\alpha_0) = 0$ et soient α_{0i} ($i = 1, 2, \dots, q$), comme de coutume, q intégrales distinctes de l'équation (33). γ_{0i} ($i = 1, 2, \dots, q$), qui ont été définies page 27, sont q intégrales distinctes de l'adjointe de l'équation (33), c'est-à-dire de l'équation (38'') $\sum_{i=0}^q C_i \frac{\partial^i \gamma_0}{\partial y^i} = 0$. On dit que les solutions γ_{0i} sont les adjointes des solutions α_{0i} . La transformation (t_{-j})

qui, à un facteur près, est la transformation adjointe de la transformation (51) est de la forme

$$u_{-j} = \sum_{i=0}^{q-1} \left(T_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) u,$$

où les équations

$$\sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^i \gamma}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^q C_i \frac{\partial^i \gamma}{\partial y^i} = 0$$

admettent les $q-j$ intégrales distinctes γ_{0i} ($i=j+1, j+2, \dots, q$) en commun, et la transformation (t_{-j}) en question est par cela complètement définie. — Nous voyons immédiatement que la proposition 9 est valable aussi pour les transformations (t_{-i}) ($i=2, 3, \dots, q$).

Parmi les transformations $(t_{-1}), (t_{-2}), \dots, (t_{-q})$, la transformation (t_{-q}) , que je désigne aussi par (T_{-1}) , est du plus grand intérêt, car elle est complètement déterminée. La transformation (T_{-1}) est de la forme

$$z_{-q} = \sum_{i=1}^q c_i \mathcal{E}_i(z),$$

où les coefficients c_i ($i=1, 2, \dots, q$), à un facteur près, sont définis par les $q-1$ relations linéaires et homogènes obtenues à l'aide du système d'équations (56') et où l'inégalité (56''') pour $h=q-1$ a lieu. Cette inégalité nous donne la condition

$$c_1 Q_{0,q} \neq 0, \text{ si } Q_{1,q-1} \neq 0,$$

et la condition

$$c_2 Q_{0,q-1} - c_1 Q'_{0,q-1} \neq 0, \text{ si } \begin{cases} Q_{1,q-1} = 0 \\ Q_{2,q-2} \neq 0 \end{cases}$$

etc. Ainsi l'inégalité en question exprime que l'équation (23) n'admet pas de X -intégrale de rang 1 et que nous devons avoir $Q_{i,q-i} = 0$ ($i=1, 2, \dots, r$) pour que la transformation (T_{-1}) soit d'ordre $q-r$. Si $Q_{q-h,h} \neq 0$ ($h=1, 2, \dots, q-2$), la transformation (T_{-1}) est de la forme

$$z_{-q} = M \begin{vmatrix} \mathcal{E}_q(z) & \mathcal{E}_{q-1}(z) & \mathcal{E}_{q-2}(z) & \dots & (-1)^{q-2} \mathcal{E}_2(z) & (-1)^{q-1} \mathcal{E}_1(z) \\ Q_{q-1,1} & Q_{q-2,1} & Q_{q-3,1} & \dots & Q_{11} & Q_{01} \\ 0 & Q_{q-2,2} & Q_{q-3,2} & \dots & Q_{12} & Q_{02} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Q_{1,q-1} & Q_{0,q-1} \end{vmatrix}$$

où le facteur M doit être choisi, si $Q_{1,q-1} \neq 0$, d'une telle manière que le coefficient de $\mathcal{E}_1(z)$ soit égal à 1 et, si $Q_{1,q-1} = 0$, d'une telle manière que le coefficient de $\mathcal{E}_2(z)$ soit égal à 1. Si $Q_{q-h,h} = 0$ ($h=s, s+1, \dots, s+r-1$), la transformation

(T_{-1}) peut encore se mettre sous la forme d'un déterminant d'ordre q au plus, ce qui résulte du système d'équations (56''').

Nous avons donc obtenu le résultat suivant: Si l'équation (23) n'admet pas de X -intégrale de rang 1, il existe toujours une, et une seule, transformation (T_{-1}) de l'équation (20), et par cette transformation l'équation (20) est ramenée à une équation de même type et de même ordre. En partant de l'équation (20) et en appliquant la transformation (T_{-1}) plusieurs fois de suite, l'on obtient une série d'équations que je désigne par (E_{-1}) , (E_{-2}) , (E_{-3}) , $\dots$; et par l'application répétée de la transformation (T_{-1}) à l'équation (23), l'on obtient une série d'équations que je désigne par (E'_{-1}) , (E'_{-2}) , (E'_{-3}) , $\dots$ (comparer page 37). L'intégrale de l'équation (E_{-1}) diffère seulement par un facteur de l'intégrale de l'adjointe de l'équation (E'_1) ; en négligeant ce facteur, on peut dire que les deux équations (E_{-1}) et (E'_1) sont adjointes. De même il est aisé de voir que l'intégrale de l'équation (E_{-i}) d'ordre n diffère seulement par un facteur de l'intégrale de l'adjointe de l'équation (E'_i) , et en négligeant ce facteur, l'on peut dire que les équations (E_{-i}) et (E'_i) d'ordre n sont adjointes.

Proposition 11. Une équation (E) dont l'équation adjointe (E') n'admet pas de X -intégrale de rang 1 est ramenée par la transformation complètement déterminée (T_{-1})

$$z_{-q} = \sum_{i=1}^q c_i \mathcal{G}_i(z),$$

les coefficients c_i ($i = 1, 2, \dots, q$) étant déterminés par les $q-1$ équations linéaires et homogènes qu'on obtient en éliminant les $q-1$ coefficients c_i ($i = q+1, q+2, \dots, 2q-1$) entre les $2(q-1)$ équations

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{q+h} \left[(-1)^i c_{i+1} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} C_{i+k-h}^{(k)} \right] = 0, \\ \sum_{i=0}^{q+h-1} \left[(-1)^i c_{i+1} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} Q_{i+k-h}^{(k)} \right] = 0, \end{cases} \quad (h = 0, 1, \dots, q-2)$$

à une équation (E_{-1}) de même type et de même ordre; les $q-1$ équations linéaires et homogènes qui, à un facteur près, définissent les coefficients c_i ($i = 1, 2, \dots, q$) peuvent s'écrire

$$\sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i c_{i+1} Q_{ih} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, q-1),$$

si $Q_{q-h, h} \neq 0$ ($h = 1, 2, \dots, q-2$), et dans le cas où

$$Q_{q-h, h} = 0 \quad (h = s, s+1, \dots, s+r-1), \quad Q_{q-k, k} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q-2), \\ (s+r-1 \leq q-2)$$

elles peuvent s'écrire

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i c_{i+1} Q_{ih} = 0 & (h = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, q-1), \\ \sum_{i=0}^{q-s+h-r} (-1)^i \left[c_{i+1} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} Q_{i+k-h, s}^{(k)} \right] = 0 & (h = 1, 2, \dots, r); \end{cases}$$

le facteur non essentiel doit être choisi de manière que le coefficient de la plus haute dérivée de z dans la transformation soit égal à 1. La transformation (T_{-1}) est, à un facteur près, inverse à la transformation (T_1) . L'intégration de l'une des équations (E) et (E_{-1}) entraîne celle de l'autre; de toute intégrale de l'une des équations l'on obtient sans intégration une intégrale de l'autre équation. L'équation (E_{-1}) ne peut admettre de X -intégrale de rang 1. [Comparer de plus la proposition 6.]

La transformation (T_{-1}) ne peut s'appliquer directement à une équation (20) dont l'équation adjointe (23) admet une X -intégrale de rang 1. Supposons que l'équation (23) admette s — et pas plus de s — X -intégrales distinctes de rang 1. Par l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre s , l'équation (20) peut s'écrire (39')

$$\sum_{i=0}^{q-s} \left(R_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = \sum_{i=1}^s \lambda_i X_i.$$

A l'équation (39') la transformation complètement déterminée (T_{-1}) peut s'appliquer; c'est seulement une différence de peu d'importance que le second membre de l'équation (39') n'est pas nul. En appliquant la transformation (T_{-1}) à l'équation (39') on obtiendra une équation de même type et de même ordre où le second membre est une fonction linéaire de

$$X_i, X'_i \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Je désigne ici encore l'équation obtenue par (E_{-1}) . Et par l'application répétée de la transformation (T_{-1}) l'on obtiendra une série d'équations qui peuvent être désignées par (E_{-1}) , (E_{-2}) , (E_{-3}) etc. En substituant $X_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$) dans le second membre de l'équation (E_{-h}) d'ordre $n - s$, nous obtiendrons une équation dont l'intégrale ne se distingue que par un facteur de l'intégrale de l'adjointe de l'équation (E'_h) ; en négligeant ce facteur l'on peut dire que l'équation (E'_h) et l'équation (E_{-h}) dont le second membre a été remplacé par zéro sont des équations adjointes.

Par l'application de la transformation (T_{-1}) nous pouvons reconnaître si l'équation (20) admet une Y -intégrale et, s'il y en a, ramener la détermination de cette intégrale à une quadrature et ramener l'intégration de l'équation à l'intégration d'équations différentielles linéaires. Nous pouvons procéder de la manière suivante. La transformation (T_{-1}) peut s'appliquer à l'équation (E) jusqu'à ce que nous obtenions peut-être une équation dont l'équation adjointe admet une X -intégrale de rang 1. Supposons que l'adjointe de l'équation (E_{-m_1}) admette s_1 — et pas plus de s_1 — X -intégrales distinctes de rang 1; il en suit que l'équation (E') admet s_1 — et pas plus de s_1 — X -intégrales distinctes de rang $m_1 + 1$. Par l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre s_1 , l'ordre de l'équation (E_{-m_1}) peut être diminué de s_1 unités, et puis on peut de nouveau appliquer la transformation (T_{-1}) , jusqu'à ce que nous obtenions peut-être une équation dont on pourra diminuer l'ordre encore une fois de la même manière. Si nous supposons

que l'ordre de l'équation (E_{-m_2}) ($m_2 > m_1$) puisse être diminué de s_2 unités, cela exprime que l'équation (E') admet s_2 X -intégrales distinctes de rang $m_2 + 1$ etc. Par l'application de la transformation (T_{-1}) à l'équation (E) nous pouvons par suite reconnaître si l'équation (E') admet des X -intégrales, et si l'équation (E') admet s X -intégrales distinctes de rang inférieur à $m + 2$, nous pouvons par l'application de la transformation (T_{-1}) m fois au plus et par l'intégration d'équations différentielles linéaires (s équations du premier ordre ou, en cas exceptionnel, un plus petit nombre d'équations d'ordre supérieur) diminuer l'ordre de l'équation (E) de s unités. Si l'équation (E') admet s X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ ($m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_s$) qui ne peuvent être remplacées par des intégrales de rang inférieur, nous obtiendrons de cette manière une équation d'ordre $n - s$, dont le second membre est une fonction linéaire de

$$X_i, X'_i, \dots, X_i^{(m_i - m_1)} \quad (i = 1, 2, \dots, s);$$

de toute intégrale de cette équation on obtient sans intégration une intégrale de l'équation (E) . Ainsi lorsque l'équation (E') admet q X -intégrales distinctes et que, par suite, l'équation (E) admet une Y -intégrale, l'intégration de l'équation (E) peut se ramener à l'intégration d'équations différentielles linéaires. Si l'équation (E') n'admet pas de X -intégrale, nous ne pouvons atteindre plus près à l'intégration de l'équation (E) en appliquant la transformation (T_{-1}) à l'équation (E) .

En appliquant les transformations complètement déterminées (T_1) et (T_{-1}) à l'équation (20) nous avons obtenu des résultats qui sont tout à fait analogues à ceux obtenus en appliquant les transformations de Laplace à l'équation (1) et c'est ainsi que nous avons étendu la méthode de Laplace à l'équation (20). Chaque intégrale de la forme d'Euler de l'équation (20) peut s'obtenir par la méthode de Laplace. Pour obtenir les intégrales de la forme d'Euler il ne faut que l'intégration d'équations différentielles linéaires du premier ordre ou, en cas exceptionnel, d'ordre supérieur. Lorsque soit l'équation (20) soit l'équation adjointe (23) admettent s X -intégrales distinctes, l'ordre de l'équation (20) peut être diminuée de s unités. Dans le cas où ni l'équation (20), ni l'équation adjointe (23) n'admettent une X -intégrale, la méthode de Laplace est manquée.

Nous avons trouvé que si l'une des équations (20) ou (23) admet q X -intégrales distinctes et que par suite l'autre équation admette une Y -intégrale, l'intégration de l'équation (20) peut être ramenée, par la méthode de Laplace, à l'intégration d'équations différentielles linéaires. Mais pour que l'équation (20) puisse être ramenée par la méthode de Laplace à l'intégration d'équations différentielles linéaires, on n'est pas exclusivement renvoyé à cette condition que l'une des équations (20) ou (23) admette une Y -intégrale. Supposons que l'équation (20) admette s — et pas plus de s — X -intégrales distinctes, où $q > s > 0$. Soient les s X -intégrales de l'équation (20) les intégrales (29) et supposons qu'elles ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur à $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$. En appliquant la transformation (T_1) $m_s + 1$ fois, l'intégration de l'équation (20) est ramenée

à l'intégration de l'équation (E_{m_s+1}) , qui est d'ordre $n - s$, et à l'intégration d'équations différentielles linéaires. L'équation (E_{m_s+1}) peut très bien admettre une Y -intégrale, sans que l'équation (20) admette une Y -intégrale (voir proposition 7); et l'intégration de l'équation (20) peut être ramenée à l'intégration d'équations différentielles linéaires, sans que l'équation (20) admette soit q X -intégrales distinctes, soit une Y -intégrale. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (E_{m_s+1}) , qui est d'ordre $n - s$, admette une Y -intégrale est que l'équation adjointe admette $q - s$ X -intégrales distinctes, ou autrement dit que l'équation $(E'_{-(m_s+1)})$ dont le second membre a été remplacé par zéro admette $q - s$ X -intégrales distinctes. Une condition nécessaire (non suffisante) pour ceci est que l'équation (E') admette $q - s$ X -intégrales distinctes. Supposons que l'équation (E') admette $s' -$ et pas plus de $s' -$ X -intégrales distinctes. Il en suit que l'adjointe de l'équation (E_{m_1}) , qui est d'ordre n , admet aussi s' , et pas plus de s' , X -intégrales distinctes. — Supposons $m_1 < m_2$. Les équations (E_{m_1+1}) et $(E'_{-(m_1+1)})$ sont d'ordre $n - 1$; si l'on remplace la fonction arbitraire dans le second membre de l'équation $(E'_{-(m_1+1)})$ par zéro, les équations (E_{m_1+1}) et $E'_{-(m_1+1)}$ seront adjointes, abstraction faite d'un facteur. L'adjointe de l'équation (E_{m_1+1}) admet ainsi ou s' ou $s' - 1$ X -intégrales distinctes; les fonctions γ_{0i} étant les solutions adjointes des solutions α_{0i} [voir pages 27, 55], on peut déduire que si l'équation (E') admet une X -intégrale qui correspond à

$$\gamma_{01} + \sum_{i=2}^q f_i(x)\gamma_{0i},$$

l'adjointe de l'équation (E_{m_1+1}) admet $s' - 1$ X -intégrales distinctes; sinon, l'adjointe de l'équation (E_{m_1+1}) admet s' X -intégrales distinctes. Ce résultat peut aussi être exprimé de la manière suivante: Si l'équation (E') admet s' X -intégrales distinctes correspondant à $\bar{\gamma}_{0h}$ ($h = 1, 2, \dots s'$), où

$$\bar{\gamma}_{0h} = \sum_{i=2}^q f_{ih}(x)\gamma_{0i} \quad (h = 1, 2, \dots s')$$

et où il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{h=1}^{s'} g_h(x)\bar{\gamma}_{0h} = 0,$$

l'adjointe de l'équation (E_{m_1+1}) admet s' X -intégrales distinctes. Mais supposons $m_1 = m_2$, $m_2 < m_3$; nous obtiendrons alors de la même manière le résultat suivant: si l'équation (E') admet s' X -intégrales distinctes correspondant à $\bar{\gamma}_{0h}$ ($h = 1, 2, \dots s'$), où

$$\bar{\gamma}_{0h} = \sum_{i=3}^q f_{ih}(x)\gamma_{0i} \quad (h = 1, 2, \dots s')$$

et où il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{h=1}^{s'} g_h(x)\bar{\gamma}_{0h} = 0,$$

l'adjointe de l'équation (E_{m_2+1}) admet s' X -intégrales distinctes. Nous pouvons continuer de cette manière. Nous obtiendrons alors le résultat suivant: La condition nécessaire et suffisante pour que l'adjointe de l'équation (E_{m_s+1}) admette $q - s$

X -intégrales distinctes est que l'équation (E') admette $q - s$ X -intégrales distinctes qui correspondent à $\bar{\gamma}_{0h}$ ($h = 1, 2, \dots, q - s$), où

$$\bar{\gamma}_{0h} = \sum_{i=s+1}^q f_{ih}(x) \gamma_{0i} \quad (h = 1, 2, \dots, q - s)$$

et où il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{h=1}^{q-s} g_h(x) \bar{\gamma}_{0h} = 0.$$

Proposition 12. La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégration de l'équation (20) puisse être ramenée, par la méthode de Laplace, à l'intégration d'équations différentielles linéaires est que l'équation (20) admette s ($q \geq s \geq 0$) X -intégrales qui correspondent à α_{0i} ($i = 1, 2, \dots, s$) et que l'équation adjointe (23) admette $q - s$ X -intégrales qui correspondent à $\bar{\gamma}_{0h}$ ($h = 1, 2, \dots, q - s$), où

$$\bar{\gamma}_{0h} = \sum_{i=s+1}^q f_{ih}(x) \gamma_{0i} \quad (h = 1, 2, \dots, q - s)$$

et où il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{h=1}^{q-s} g_h(x) \bar{\gamma}_{0h} = 0;$$

les désignations suivantes ont été employées

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \alpha'_{01} & \dots & \alpha_{01}^{(q-1)} \\ \alpha_{02} & \alpha'_{02} & \dots & \alpha_{02}^{(q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{0q} & \alpha'_{0q} & \dots & \alpha_{0q}^{(q-1)} \end{vmatrix}, \quad \gamma_{0i} = \frac{\partial \log \delta}{\partial \alpha_{0i}^{(q-1)}} \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

α_{0i} ($i = 1, 2, \dots, q$) sont q intégrales distinctes de l'équation (33), $\frac{\partial^j \alpha_{0i}}{\partial y^j} = \alpha_{0i}^{(j)}$.

J'ai déjà dit que ma définition des transformations de Laplace aux équations (20) correspondant au système de caractéristiques $y = \text{const.}$ ne coïncide pas avec la définition de Le Roux des transformations de Laplace à l'équation (16). Je suis parti de la supposition de Le Roux que le caractère essentiel des transformations de Laplace correspondant au système de caractéristiques $y = \text{const.}$ soit que la transformation permet de diminuer le rang de l' Y -intégrale, mais parmi les transformations linéaires qui ont ce caractère essentiel, j'ai choisi une toute autre transformation que celle de Le Roux. A ce sujet, il serait d'intérêt d'examiner quelles transformations linéaires ramènent toute Y -intégrale de l'équation (16) (mise sous une telle forme que y est une variable caractéristique) à une Y -intégrale d'ordre inférieur.

J'ai défini la transformation (t_{-j}) ($q \geq j \geq 1$) comme étant, à un facteur près, inverse à la transformation (t_j) . Mais on peut aussi partir directement des qualités de la transformation (t_{-j}) . Si l'on applique la transformation (t_{-j}) à une équation (20) qui admet une Y -intégrale, le rang de l' Y -intégrale est diminué de

j unités. En partant de cette qualité de la transformation (t_{-j}) l'on peut directement déduire que la transformation (t_{-j}) est de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=1}^q c_i \mathcal{E}_i(z),$$

où les coefficients c_i ($i = 1, 2, \dots, q$) vérifient les $j - 1$ relations linéaires et homogènes qui sont obtenues en éliminant les $(j - 1)$ coefficients c_i ($i = q + 1, q + 2, \dots, q + j - 1$) entre les $2(j - 1)$ équations (56'). La preuve en peut être étendue à l'équation (16). Je vais résumer cette preuve.

L'équation (20) peut s'écrire

$$\Psi_q \frac{\partial^q z}{\partial y^q} + \Psi_{q-1} \frac{\partial^{q-1} z}{\partial y^{q-1}} + \dots + \Psi_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \Psi_0 z = 0, \text{ où } \Psi_i = A_i \frac{\partial}{\partial x} + B_i.$$

Employons les désignations suivantes:

$$A_i^{(k)} = \frac{\partial^k A_i}{\partial y^k}, \quad B_i^{(k)} = \frac{\partial^k B_i}{\partial y^k}, \quad \Psi_i^{(k)} = A_i^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} + B_i^{(k)},$$

$$\Psi_{ih} = \Psi_{i+h} - i \Psi'_{i+h+1} + \frac{i(i+1)}{2!} \Psi''_{i+h+2} - \dots + (-1)^{q-i-h} \frac{i(i+1) \dots (q-h-1)}{(q-i-h)!} \Psi_q^{(q-i-h)},$$

$$(i \geq 0, h \leq 0)$$

où $\Psi_i = 0$ pour $i > q$ et pour $i < 0$. D'après cette désignation nous avons:

$$\Psi_{0h} = \Psi_h \quad (h = 0, 1, \dots, q), \quad \Psi_{ih} = \sum_{k=0}^{q-i-h} (-1)^k \frac{(i+k-1)!}{(i-1)! k!} \Psi_{i+h+k}^{(k)} \quad (i > 0, h \leq 0).$$

Nous trouvons aisément

$$\Psi'_{ih} + \Psi_{i, h-1} = \Psi_{i-1, h} = 0 \quad (i > 0).$$

D'après cette désignation nous avons

$$\mathcal{E}_0(z) = \sum_{h=0}^q \Psi_h \frac{\partial^h z}{\partial y^h}, \quad \mathcal{E}_i(z) = \sum_{h=0}^{q-i} \Psi_{ih} \frac{\partial^h z}{\partial y^h} \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Supposons que l'équation (20) admette l' Y -intégrale

$$\zeta = \beta_0 Y^{(r)} + \beta_1 Y^{(r-1)} + \dots + \beta_r Y \quad (\beta_0 \neq 0).$$

Écrivons

$$\mathcal{E}_{i, r-m} = \sum_{k=0}^{q-i} \Psi_{ik} \left(\sum_{h=0}^k \frac{k!}{h! (k-h)!} \beta_{m+h}^{(k-h)} \right) \quad (q \geq i \geq 0, m \leq 0), \quad \mathcal{E}_{i, r-m} = 0 \quad (i > q),$$

où la désignation $\beta_j^{(h)} = \frac{\partial^h \beta_j}{\partial y^h}$ est employée et où $\beta_j = 0$ pour $j > r$ et pour $j < 0$. Si nous remplaçons z dans l'expression $\mathcal{E}_i(z)$ par l' Y -intégrale, nous aurons

$$\mathcal{E}_i(\zeta) = \sum_{m=0}^{r+q-i} \mathcal{E}_{im} Y^{(m)} \quad (i = 0, 1, \dots, q).$$

De l'identité

$$\Psi'_{ih} + \Psi_{i, h-1} = \Psi_{i-1, h} \quad (i > 0)$$

l'on trouve

$$\mathfrak{B}'_{im} + \mathfrak{B}_{i, m-1} = \mathfrak{B}_{i-1, m} - \Psi_{i-1}(\beta_{r-m}) \quad (i > 0; m \geq 0),$$

la désignation $\mathfrak{B}'_{ij} = \frac{\partial \mathfrak{B}_{ij}}{\partial y}$ étant employée. Pour $m > r$, cette égalité devient

$$\mathfrak{B}'_{im} + \mathfrak{B}_{i, m-1} = \mathfrak{B}_{i-1, m} \quad (i > 0; m > r).$$

Cette égalité et les conditions $\mathfrak{B}_{0m} = 0$ ($m \geq r+1$) nous donnent

$$\mathfrak{B}_{im} = 0 \quad (i > 0, m \geq r).$$

Il en suit que toute transformation de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{S}_i(z)$$

diminue le rang de l' Y -intégrale d'une unité au moins. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=0}^q \left(T_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \equiv \sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{S}_i(z) + \sum_{i=1}^q d_i \frac{\partial^{q-i} z}{\partial y^{q-i}}$$

permette de diminuer le rang de l' Y -intégrale, est ainsi que la transformation soit de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{S}_i(z).$$

Et nous voyons immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour que la transformation en question diminue le rang de l' Y -intégrale de j unités est que les $j-1$ conditions

$$\sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{B}_{im} = 0 \quad (m = r-1, r-2, \dots, r-j+1)$$

soient remplies. Nous allons examiner ce qu'expriment ces conditions. En partant des égalités

$$\mathfrak{B}_{0m} = 0, \mathfrak{B}_{im} = 0 \quad (i > 0, m \geq r), \mathfrak{B}'_{im} + \mathfrak{B}_{i, m-1} = \mathfrak{B}_{i-1, m} - \Psi_{i-1}(\beta_{r-m}) \quad (i > 0, m \geq 0)$$

on peut déduire l'égalité

$$\mathfrak{B}_{i, r-m} = - \sum_{k=1}^m \Psi_{i-k} \left(\sum_{h=0}^{m-k} (-1)^h \frac{(h+k-1)!}{h! (k-1)!} \beta_{m-k-h}^{(h)} \right) \quad (i > 0, m > 0)$$

(on peut montrer que si l'égalité en question est vraie pour m , elle est vraie aussi pour $m+1$, et on voit immédiatement que l'égalité a lieu pour $m=1$). Ainsi

la condition $\sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{B}_{i, r-1} = 0$ peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^q c_i \Psi_{i-1}(\beta_0) = 0.$$

Il suit de cette condition qu'il existe une identité de la forme

$$\sum_{i=0}^{q+1} c_i \Psi_{i,-1}(z) \equiv 0,$$

le coefficient c_{q+1} ayant été introduit. La condition $\sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{B}_{i,r-2} = 0$ peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^{q+1} c_i [\Psi_{i,-2}(\beta_0) + \Psi_{i,-1}(\beta_1 - \beta_0)] = 0;$$

cette condition nous donne une identité de la forme

$$\sum_{i=1}^{q+2} c_i \Psi_{i,-2}(z) \equiv 0.$$

Nous pouvons continuer de cette manière; en partant des égalités

$$\mathfrak{B}_{i,r-m} = - \sum_{k=1}^m \Psi_{i,-k} \left(\sum_{h=0}^{m-k} (-1)^h \frac{(h+k-1)!}{h! (k-1)!} \beta_{m-k-h}^{(h)} \right) \quad (i > 0, \quad m > 0)$$

nous pouvons déduire que la condition nécessaire et suffisante pour que les conditions

$$\sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{B}_{i,r-m} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, j-1)$$

soient remplies est qu'il existe $j-1$ identités

$$\sum_{i=1}^{q+1} c_i \Psi_{i,-h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j-1).$$

Ces $j-1$ identités nous donnent les $2(j-1)$ conditions

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{q+h} c_i \sum_{k=0}^{q-i+h} (-1)^k \frac{(i+k-1)!}{(i-1)! k!} A_{i+k-h}^{(k)} \right| &= 0, \\ \left| \sum_{i=1}^{q+h} c_i \sum_{k=0}^{q-i+h} (-1)^k \frac{(i+k-1)!}{(i-1)! k!} B_{i+k-h}^{(k)} \right| &= 0 \end{aligned} \quad (h = 1, 2, \dots, j-1)$$

Et en tenant compte des équations (38'), nous pouvons remplacer ces $2(j-1)$ conditions par les $2(j-1)$ conditions (56'). — Dans la définition en question de la transformation (t_{-j}) , nous sommes partis de ce que l'équation (20) admet une Y -intégrale. Mais on voit aisément que ce n'est pas nécessaire de faire cette supposition. Lorsque l'équation (20) n'admet pas une Y -intégrale, l'on peut pourtant obtenir une expression de la forme

$$\theta = \beta_0 Y^{(r)} + \beta_1 Y^{(r-1)} + \beta_2 Y^{(r-2)} + \dots + \beta_r Y \quad (\beta_0 \neq 0),$$

où les coefficients $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ ont été formés d'après la même loi que les coefficients d'une Y -intégrale (c'est-à-dire, si l'on remplace l'expression mentionnée à la place de z dans l'équation (20), les coefficients de $Y^{(r+q)}, Y^{(r+q-1)}, \dots, Y^{(q)}$ seront nuls). En substituant, nous aurons

$$\sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{S}_i(\theta) = \sum_{i=1}^q c_i \sum_{m=0}^{r+q-i} \mathfrak{B}_{im} Y^{(m)}.$$

Posons $r \geq q + j - 2$. Le coefficient de $Y^{(r)}$ dans l'expression $\sum_{i=1}^q c_i \mathcal{E}_i(\theta)$ est nul; et les $j - 1$ identités

$$\sum_{i=1}^{q+h} c_i \Psi_{i, -h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j - 1)$$

nous donnent la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $\sum_{i=1}^q c_i \mathcal{B}_{im} = 0$ ($m = r - 1, r - 2, \dots, r - j + 1$), c'est-à-dire la condition nécessaire et suffisante pour que les coefficients de $Y^{(r-1)}, Y^{(r-2)}, \dots, Y^{(r-j+1)}$ dans l'expression $\sum_{i=1}^q c_i \mathcal{E}_i(\theta)$ soient aussi nuls.

En considérant la transformation (t_{-j}) ($q \geq j \geq 1$) comme inverse à la transformation (t_j) ou en définissant la transformation (t_{-j}) directement de ses qualités, l'on obtient ainsi le même résultat. Il est pourtant à remarquer que si l'équation (20) peut s'écrire

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[r \sum_{i=0}^{q-1} \left(R_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z \right] = 0,$$

la transformation

$$z \rightarrow z_1 = \sum_{i=0}^{q-1} \left(R_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z$$

n'est pas inverse à une transformation (t_1) , mais peut être considérée comme une transformation (t_{-1}) , si l'on veut.

Comme je l'ai déjà dit, la preuve donnée ici peut être étendue à l'équation (16). Supposons que $y = \text{const.}$ forme un système de caractéristiques à l'équation (16). L'équation (16) d'ordre n peut s'écrire

$$\Psi_p \frac{\partial^p z}{\partial y^p} + \Psi_{p-1} \frac{\partial^{p-1} z}{\partial y^{p-1}} + \dots + \Psi_0 z = 0 \quad (p \leq n-1), \text{ où } \Psi_i = \sum_{j=0}^{n-i} A_{ji} \frac{\partial^j}{\partial x^j},$$

Soit l'équation $\Psi_p(v) = 0$ d'ordre s . Écrivons

$$\mathcal{E}_i(z) \equiv \sum_{h=0}^{p-i} \Psi_{ih} \frac{\partial^h z}{\partial y^h} \quad (i = 0, 1, \dots, p),$$

$$\text{où } \Psi_{0h} = \Psi_h \quad (h = 0, 1, \dots, p), \quad \Psi_{ih} = \sum_{k=0}^{p-h-i} (-1)^k \frac{(i+k-1)!}{(i-1)! k!} \Psi_{i+h+k}^{(k)} \quad (i > 0, h \geq 0).$$

Toute transformation de la forme

$$z \rightarrow z_j = \sum_{i=1}^p c_i \mathcal{E}_i(z)$$

diminue le rang des Y -intégrales d'une unité. Et la condition nécessaire et suffisante pour que cette transformation, appliquée à une équation qui admet s Y -intégrales distinctes, diminue le rang de chaque Y -intégrale de j unités est qu'il existe $j - 1$ identités

$$\sum_{i=1}^{p+h} c_i \Psi_{i-h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j-1).$$

Je ne puis encore dire si l'application de la transformation en question à l'équation (16) amène des résultats qui sont d'intérêt.

Pour l'équation (1), nous savons que ce fait notable a lieu: Si l'équation admet une X -intégrale [Y -intégrale] de rang $m+1$, il existe une intégrale intermédiaire d'ordre $m+1$, dépendant d'une fonction arbitraire de y [respectivement de x], c'est pourquoi la méthode de Laplace et celle de Darboux s'appliquent avec succès aux mêmes équations (1)¹⁾. Maintenant nous allons examiner si ce résultat peut être étendu à l'équation (20).

Soit

$$\alpha_0 X^{(m)} + \alpha_1 X^{(m-1)} + \dots + \alpha_m X$$

une X -intégrale de rang $m+1$ de l'équation (20). Nous pouvons écrire

$$\sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \sum_{j=0}^m \alpha_{m-j} \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \equiv \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^q \lambda_{ij} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j}, \quad \text{où } \lambda_{m+1,q} = \alpha_0 \neq 0.$$

Comme le premier membre de cette identité s'annule pour $u = X$, nous avons $\lambda_{i0} = 0$ ($i = 0, 1, \dots, m+1$) et nous pouvons écrire

$$\sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \sum_{j=0}^m \alpha_{m-j} \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \equiv \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{q-1} \lambda_{i,j+1} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^{j+1}}.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left[\alpha_{m-j} \sum_{i=0}^q (-1)^i \left(\frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_i u) - \frac{\partial^i}{\partial y^i} (B_i u) \right) \right] \equiv \\ & \equiv \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^{i+j} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} (\lambda_{i,j+1} u). \end{aligned}$$

Les équations

$$\sum_{i=0}^q (-1)^i \left[\frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_i u) - \frac{\partial^i}{\partial y^i} (B_i u) \right] = 0, \quad \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^{i+j} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} (\lambda_{i,j+1} u) = 0$$

forment un système en involution. Et toute intégrale de l'équation (23) est aussi une intégrale de l'équation

$$(57) \quad \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^{i+j} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} (\lambda_{i,j+1} u) = X, \quad \text{où } \lambda_{m+1,q} = \alpha_0 \neq 0.$$

L'équation (57), qui contient une fonction arbitraire de x , est une intégrale intermédiaire d'ordre $m+q$ de l'équation (23).

Inversement, si l'équation (23) admet une intégrale intermédiaire de la forme (57), il en suit que les coefficients α_i ($i = 0, 1, \dots, m$) peuvent être choisis de manière que l'identité

¹⁾ GOURSAT, Leçons. T. II, pages 174—178.

$$\sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \sum_{j=0}^m \alpha_{m-j} \frac{\partial^j u}{\partial y^j} \equiv \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{q-1} \lambda_{i,j+1} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^{j+1}}, \quad \text{où } \alpha_0 = \lambda_{m+1, q} \neq 0.$$

a lieu, et que l'équation (20) admet l'intégrale

$$\alpha_0 X^{(m)} + \alpha_1 X^{(m-1)} + \dots + \alpha_m X.$$

Si nous supposons qu'une intégrale intermédiaire de la forme (57) de l'équation (23) soit donnée, l'on obtient ainsi sans intégration une X -intégrale de l'équation (20); et réciproquement, si une X -intégrale de l'équation (20) est donnée, on en obtient directement une intégrale intermédiaire de l'équation (23).

Supposons que

$$\beta_0 Y^{(m)} + \beta_1 Y^{(m-1)} + \dots + \beta_m Y$$

soit une Y -intégrale de rang $m+1$ de l'équation (20). Nous pouvons écrire

$$\sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \sum_{j=0}^m \beta_{m-j} \frac{\partial^j u}{\partial y^j} \equiv \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^{q+m} \mu_{ij} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j}, \quad \text{où } \mu_{1, q+m} = \beta_0 \neq 0.$$

Comme le premier membre de cette identité s'annule pour $u = Y$, nous aurons $\mu_{0j} = 0$ ($j = 0, 1, \dots, q+m$). Il en suit

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left[\beta_{m-j} \sum_{i=0}^q (-1)^i \left(\frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_i u) - \frac{\partial^i}{\partial y^i} (B_i u) \right) \right] \equiv \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=0}^{q+m} (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial y^j} (\mu_{1j} u),$$

où $\mu_{1, q+m} = \beta_0 \neq 0$.

L'équation (23) et l'équation

$$\sum_{j=0}^{q+m} (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial y^j} (\mu_{1j} u) = 0$$

forment un système en involution. Et toute intégrale de l'équation (23) est aussi une intégrale de l'équation

$$(58) \quad \sum_{j=0}^{q+m} (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial y^j} (\mu_{1j} u) = Y, \quad \text{où } \mu_{1, q+m} = \beta_0 \neq 0.$$

L'équation (58) est une intégrale intermédiaire d'ordre $m+q$ de l'équation (23).

Inversement, si nous supposons qu'une intégrale intermédiaire de la forme (58) de l'équation (23) soit donnée, il en suit que l'équation (20) admet une Y -intégrale de rang $m+1$ au plus, et l' Y -intégrale est obtenue sans intégration.

Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant; si nous supposons que l'équation (20) admette une X -intégrale [Y -intégrale] de rang $m+1$, il en suit que l'équation adjointe (23) admet une intégrale intermédiaire de la forme (57) [(58) respectivement], qui est d'ordre $m+q$ et dont le second membre est une fonction arbitraire de x [respectivement de y]. Ce résultat peut aussi être obtenu par l'application des transformations de Laplace à l'équation (20). La preuve que nous venons de donner a cependant l'avantage qu'elle peut être appliquée sans changement à l'équation (16). Si l'équation (16) d'ordre n admet une intégrale de la forme d'Euler dépendant

d'une fonction arbitraire de la variable caractéristique $f(x, y)$ et qui est de rang $m + 1$, il en suit que l'équation adjointe admet une intégrale intermédiaire d'ordre $n + m - 1$ dont le second membre est une fonction arbitraire de $f(x, y)$; si l'intégrale intermédiaire est donnée, l'on obtient sans intégration l'intégrale de la forme d'Euler.

Nous savons (proposition 10) que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une Y -intégrale est que l'équation adjointe (23) admette q X -intégrales distinctes. Par conséquent, si l'équation (20) admet une Y -intégrale, l'équation (20) admet q intégrales intermédiaires de la forme (57) qui ne peuvent être remplacées par $q - 1$ intégrales intermédiaires. Et si l'équation (20) admet q X -intégrales distinctes, l'équation (20) admet une intégrale intermédiaire de la forme (58).

Il suit de la proposition 12 que la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégration de l'équation (20) puisse être ramenée à l'intégration d'équations différentielles linéaires par la méthode de Laplace est que l'équation adjointe (23) admette s intégrales intermédiaires de la forme

$$\sum_{i=0}^{m_h+1} \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^{i+j} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} (\lambda_{i,j+1,h} u) = X_h \quad (h = 1, 2, \dots, s), \quad \text{où } \lambda_{m_h+1,q,h} = \alpha_{0h}$$

et que l'équation (20) admette $q - s$ intégrales intermédiaires de la forme

$$\sum_{i=0}^{m_h+1} \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^{i+j} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} (\lambda_{i,j+1,h} z) = X_h \quad (h = s + 1, s + 2, \dots, q),$$

$$\text{où } \lambda_{m_h+1,q,h} = \bar{\gamma}_{0h} = \sum_{i=s+1}^q f_{ih}(x) \gamma_{0i}$$

et où il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{i=s+1}^q g_i(x) \bar{\gamma}_{0i} = 0$$

(pour la désignation γ_{0i} voir la proposition 12).

A ce sujet, il serait intéressant de faire une comparaison entre la méthode de Laplace et la méthode générale d'intégration de Darboux, appliquée à l'équation (20)¹⁾, la méthode de Darboux ayant justement pour but de trouver des intégrales intermédiaires de l'équation en question; c'est mon intention d'y revenir une autre fois.

¹⁾ La méthode générale de Darboux pour intégrer l'équation (15)

$$F \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y \right] = 0$$

peut être étendue aux équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur, à deux variables indépendantes. Voir: GOURSAT, Leçons. T. II, pages 313—316.

II.

La méthode de Laplace pour l'équation (1) a été beaucoup simplifiée par l'introduction de la désignation des invariants

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \quad k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c.$$

En partant des invariants h et k on peut calculer les invariants $h_1, h_2, h_3, \dots$ et $k_{-1}, k_{-2}, k_{-3}, \dots$ par l'emploi répété des formules

$$\begin{cases} h_{i+1} + h_{i-1} = 2h_i - \frac{\partial^2 \log h_i}{\partial x \partial y} \\ k_{i+1} = h_i \end{cases} \quad (i \geq 0).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) admette une X -intégrale [Y -intégrale] de rang $m+1$ est $h_m = 0$ [$k_{-m} = 0$]. Supposons $h_m = 0$. En appliquant la transformation (6) m fois de suite, nous obtiendrons l'équation

$$\frac{\partial^2 z_m}{\partial x \partial y} + a_m \frac{\partial z_m}{\partial x} + b \frac{\partial z_m}{\partial y} + c_m z_m = 0, \quad \text{où} \quad \frac{\partial a_m}{\partial x} + a_m b - c_m = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial y} + a_m b - c_m = k_m,$$

qui admet l'intégrale $e^{-\int a_m dy} X$. De l'intégrale générale de la dernière équation l'on obtient l'intégrale générale de l'équation (1) par l'emploi de la formule

$$z = e^{-\int b dx} \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} \dots \frac{1}{h_{m-1}} \frac{\partial}{\partial x} (z_m e^{\int b dx}).$$

En appliquant la méthode de Laplace à l'équation (1) on n'a donc jamais besoin d'employer les transformations de Laplace, il suffit de calculer les invariants $h, h_1, h_2, h_3, \dots$ et $k, k_{-1}, k_{-2}, k_{-3}, \dots$. Il serait intéressant d'étendre la désignation des invariants à l'équation (20).

Le caractère essentiel des invariants h et k de l'équation (1) est qu'ils ne changent pas de valeurs pour la substitution $z = \lambda z$, où λ est une fonction quelconque de x et de y , et que deux équations de la forme (1) qui ont les mêmes valeurs

des invariants h et k peuvent se ramener l'une à l'autre par une substitution de la forme $z = \lambda \bar{z}$.

Par la substitution $z = \lambda \bar{z}$, l'équation (20) est ramenée à l'équation (41)

$$\sum_{i=0}^q \left(\bar{A}_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + \bar{B}_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \bar{z} = 0,$$

où les coefficients $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$ sont définis par les équations (41').

Écrivons

$$I_i = \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^i \frac{(i+j)!}{i! j!} A_{i+j} \frac{\partial^j \nu}{\partial y^j} \quad (i = 0, 1, \dots, q-2), \quad \text{où } \frac{\partial \log \nu}{\partial y} = -\frac{1}{q} A_{q-1}.$$

ν est déterminé à un facteur près qui est une fonction de x , et les fonctions I_i ($i = 0, 1, \dots, q-2$) ne dépendent pas de ce facteur. Nous pouvons aussi écrire

$$I_i = A_i - \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} A_{i+j} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{q} A_{q-1} \right)^{j-1} A_{q-1} \quad (i = 0, 1, \dots, q-2).$$

Si l'on choisit λ exactement égal à ν , l'on obtient

$$\prod_{\lambda=\nu} \bar{A}_{q-1} = 0, \quad \prod_{\lambda=\nu} A_i = I_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-2).$$

Il en résulte que, si une équation du type

$$\sum_{i=0}^q \left(\bar{A}_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + \bar{B}_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \bar{z} = 0, \quad \text{où } \bar{A}_{q-1} = 0,$$

est donnée, et que l'on fasse la substitution $z = \lambda \bar{z}$, l'on obtient une équation pour laquelle nous aurons $I_i = \bar{A}_i$ ($i = 0, 1, \dots, q-2$); c'est-à-dire les valeurs des fonctions I_i ($i = 0, 1, \dots, q-2$) sont indépendantes de λ . Toutes les fonctions I_i ($i = 0, 1, \dots, q-2$) sont par suite des invariants de l'équation (20) pour la substitution $z = \lambda \bar{z}$.

Nous voyons immédiatement que la fonction I_{q-1} , où

$$I_{q-1} = \frac{\partial A_{q-1}}{\partial x} - q \frac{\partial B_q}{\partial y},$$

est aussi un invariant de l'équation (20).

Nous avons déjà employé la désignation

$$P_i = \frac{\partial A_i}{\partial x} + A_i B_q - B_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1)$$

(voir page 22); écrivons aussi

$$\bar{P}_i = \frac{\partial \bar{A}_i}{\partial x} + \bar{A}_i \bar{B}_q - \bar{B}_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1),$$

Les équations (41') nous donnent

$$\bar{P}_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{q-i-1} \frac{(i+j)!}{i! j!} P_{i+j} \frac{e^{j\lambda}}{\partial y^j} \quad (i = 0, 1, \dots, q-1).$$

Écrivons

$$H_i = \frac{1}{v} \sum_{j=0}^{q-i-1} \frac{(i+j)!}{i! j!} P_{i+j} \frac{\partial^j v}{\partial y^j} \quad (i = 0, 1, \dots, q-1), \quad \text{où } \frac{\partial \log v}{\partial y} = -\frac{1}{q} A_{q-1};$$

v est déterminé à un facteur près qui est une fonction de x ; les fonctions H_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$) ne dépendent pas de ce facteur. Nous pouvons aussi écrire

$$H_i = P_i - \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q-i-1} \frac{(i+j)!}{i! j!} P_{i+j} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{q} A_{q-1} \right)^{j-1} A_{q-1} \quad (i = 0, 1, \dots, q-1).$$

Si l'on choisit λ égal à v , l'on obtient

$$\prod_{\lambda=v} \bar{P}_i = H_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1).$$

De même que nous avons prouvé que les fonctions I_i ($i = 0, 1, \dots, q-2$) sont des invariants de l'équation (20), nous trouvons aussi que les fonctions H_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$) sont des invariants de l'équation (20) pour la substitution $z = \lambda z^1$.

Nous avons ainsi obtenu les $2q$ invariants

$$I_i, H_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1)$$

de l'équation (20). Si $A_{q-1} = 0$, nous aurons:

$$I_{q-1} = -q \frac{\partial B_q}{\partial y}, \quad I_i = A_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-2),$$

$$H_i = \frac{\partial A_i}{\partial x} + A_i B_q - B_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1).$$

Les $2q$ invariants H_i, I_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$) sont évidemment indépendants l'un de l'autre. Il est aisé de voir que deux équations de la forme (20) qui ont les mêmes valeurs des $2q$ invariants H_i, I_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$) peuvent se ramener l'une à l'autre par la substitution $z = \lambda \bar{z}$. Il en suit que tout invariant de l'équation (20) peut s'exprimer au moyen des invariants I_i, H_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$). — Comme Darboux, je veux regarder comme équivalentes deux équations qui se ramènent l'une à l'autre par le changement de z en λz et qui ont, par conséquent, les mêmes invariants.

¹⁾ Pisati a déjà donné des relations entre les invariants H_i et les coefficients de l'équation (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1905, page 360).

Les invariants de l'équation adjointe (23) sont aussi des invariants de l'équation (20), car en effectuant la substitution $z = \lambda \bar{z}$ à l'équation (20) et la substitution $u = \frac{1}{\lambda} \bar{u}$ à l'équation (23), écrite sous la forme (38), l'on obtiendra les deux équations

$$\sum_{i=0}^q \frac{1}{\lambda} \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) (\lambda \bar{z}) = 0, \quad \sum_{i=0}^q \lambda \left(C_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + D_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \left(\frac{\bar{u}}{\lambda} \right) = 0$$

qui sont toujours adjointes. Je forme les $2q$ invariants

$$J_i, K_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1)$$

des coefficients de l'équation (23) de la même manière que j'ai formé les invariants I_i, H_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$) des coefficients de l'équation (20). Deux équations de la forme (20) qui ont les mêmes valeurs des $2q$ invariants J_i, K_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$) sont équivalentes, car les deux équations adjointes sont équivalentes. Tout invariant de l'équation (20) peut par suite s'exprimer au moyen des $2q$ invariants J_i, K_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$).

Comme tous les invariants de l'équation (20) sont des fonctions des invariants I_i, H_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$), chacun des invariants J_i, K_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$) doit pouvoir s'exprimer au moyen des $2q$ invariants I_i, H_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$). Nous allons maintenant chercher les relations qui lient les invariants I_i, H_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$) et les invariants J_i, K_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$). Si nous supposons $A_{q-1} = 0$, nous aurons

$$I_{q-1} = -q \frac{\partial B_q}{\partial y}, \quad J_{q-1} = -q \frac{\partial D_q}{\partial y}, \quad I_i = A_i, \quad J_i = C_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-2)$$

$$H_i = \frac{\partial A_i}{\partial x} + A_i B_q - B_i, \quad K_i = \frac{\partial C_i}{\partial x} + C_i D_q - D_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1).$$

Les équations (38') nous donnent immédiatement

$$J_{q-1} = -I_{q-1}, \quad J_i = (-1)^{q-i} \sum_{j=0}^{q-i-2} (-1)^j \frac{(i+j)!}{i!j!} \frac{\partial^j}{\partial y^j} I_{i+j}, \quad (i = 0, 1, \dots, q-2).$$

Des équations (38') nous pouvons aussi déduire

$$\begin{aligned} H_i - \frac{\partial I_i}{\partial x} + (-1)^{q-i} \left(K_i - \frac{\partial J_i}{\partial x} \right) + \sum_{j=0}^{q-i-1} (-1)^j \frac{(i+j)!}{i!j!} \frac{\partial^j}{\partial y^j} [H_{i+j} + (-1)^{q-i} K_{i+j}] = \\ = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q-i-2} \frac{(i+j)!}{i!j!} [I_{i+j} - (-1)^{q-i} J_{i+j}] \frac{\partial^{j-1} I_{q-1}}{\partial y^{j-1}} \quad (i = 0, 1, \dots, q-1) \end{aligned}$$

Les relations qui lient les invariants I_i, H_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$) et les invariants J_i, K_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$) sont données par les $2q$ équations obtenues. Il résulte

de ces relations que si deux équations de la forme (20) où $q > 1$ ont les mêmes valeurs des $2q$ invariants

$$H_i, K_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1),$$

il n'en suit nullement que les deux équations soient équivalentes; par suite, si $q > 1$, on ne peut pas obtenir tous les invariants de l'équation (20) au moyen des $2q$ invariants H_i, K_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$).

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette q X -intégrales distinctes de rang 1 est $H_i = 0$ ($i = 0, 1, \dots, q-1$), et la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une Y -intégrale de rang 1 est $K_i = 0$ ($i = 0, 1, \dots, q-1$). Nous allons maintenant examiner à quelles relations les invariants doivent satisfaire pour que l'équation (20) admette s X -intégrales distinctes de rang 1.

Nous écrivons

$$H_{ij} = \sum_{r=0}^{q-i-j} \frac{(i+r)!}{i!r!} P_{i+r,j} \frac{\partial^r \nu}{\partial y^r} \quad \left(\begin{matrix} i=0, 1, \dots, q-j \\ j=1, 2, \dots, q \end{matrix} \right), \quad \text{où} \quad \frac{\partial \log \nu}{\partial y} = -\frac{1}{q} A_{q-1}.$$

Les quantités P_{ij} ont été définies page 23. D'après la désignation appliquée, nous avons $P_i = P_{i1}$ et par suite $H_i = H_{i1}$.

De la même manière que nous avons trouvé que les H_i sont des invariants, l'on peut aussi montrer que tous les H_{ij} sont des invariants de l'équation (20). Tous les H_{ij} peuvent s'exprimer au moyen des $2q-1$ invariants I_i ($i = 0, 1, \dots, q-2$), H_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$). Si nous supposons $A_{q-1} = 0$, nous obtiendrons

$$H_{ij} = P_{ij} \quad \left(\begin{matrix} i=0, 1, \dots, q-j \\ j=1, 2, \dots, q \end{matrix} \right);$$

en remplaçant

$$A_{q-1} = 0, \quad A_r = I_r \quad (r = 0, 1, \dots, q-2), \quad P_r = H_r \quad (r = 0, 1, \dots, q-1),$$

dans la définition de P_{ij} (page 23), nous obtiendrons H_{ij} en fonction de

$$I_r \quad (r = i-j+2, i-j+3, \dots, q-2), \quad H_r \quad (r = i-j+1, i-j+2, \dots, q-1).$$

Entre les invariants H_{ij} $\left(\begin{matrix} i=0, 1, \dots, q-j \\ j=1, 2, \dots, q \end{matrix} \right)$ existent les relations suivantes

$$(59) \quad H_{i,j+1} (H_{p+1,j-1})^2 = \begin{vmatrix} H_{p,j} & H_{p-1,j} + H'_{p,j} & H_{i-1,j} + H'_{i,j} \\ 0 & H_{p,j} & H_{i,j} \\ H_{p+1,j-1} & H_{p,j-1} & H_{i,j-1} \end{vmatrix},$$

$$(59') \quad H_{i,j+2} (H_{p+1,j-1})^4 =$$

$$= \begin{vmatrix} H_{p,j} & H_{p-1,j} + 2H'_{p,j} & H_{p-2,j} + 2H'_{p-1,j} + H''_{p,j} & H_{p-3,j} + 2H'_{p-2,j} + H''_{p-1,j} & H_{i-2,j} + 2H'_{i-1,j} + H''_{i,j} \\ 0 & H_{p,j} & H_{p-1,j} + H'_{p,j} & H_{p-2,j} + H'_{p-1,j} & H_{i-1,j} + H'_{i,j} \\ 0 & 0 & H_{p,j} & H_{p-1,j} & H_{i,j} \\ H_{p+1,j-1} & H_{p,j-1} + H'_{p+1,j-1} & H_{p-1,j-1} + H'_{p,j-1} & H_{p-2,j-1} + H'_{p-1,j-1} & H_{i-1,j-1} + H'_{i,j-1} \\ 0 & H_{p+1,j-1} & H_{p,j-1} & H_{p-1,j-1} & H_{i,j-1} \end{vmatrix}$$

etc. où $p = q-j$ et où la désignation $\frac{\partial H}{\partial y} = H'$, $\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = H''$ est employée [pages 23, 24].

Selon la proposition 2, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette s X -intégrales distinctes de rang 1 est

$$H_{i, q-i} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, s-1).$$

Formons les invariants

$$K_{ij} \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right)$$

des coefficients de l'équation (23) de la même manière que nous avons formé les invariants

$$H_{ij} \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right)$$

des coefficients de l'équation (20) [page 73]. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (23) admette s X -intégrales distinctes de rang 1 est

$$K_{i, q-i} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, s-1).$$

Pour reconnaître si l'équation (20) [(23)] admet des X -intégrales de rang 1, et dans ce cas combien, il n'est donc pas nécessaire de calculer tous les invariants

$$H_{ij} [K_{ij}] \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right),$$

il suffit de calculer les q invariants $H_{i, q-i} [K_{i, q-i}]$ respectivement] ($i = 0, 1, \dots, q-1$).

Ce sont les $2q$ invariants

$$H_{i, q-i}, K_{i, q-i} \quad (i = 0, 1, \dots, q-1)$$

qui correspondent le plus près aux invariants

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \quad k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c$$

de l'équation (1). Si l'on effectue la substitution $x = \varphi(\bar{x})$, $y = \psi(\bar{y})$, les invariants h et k de l'équation (1) ne subissent pas d'autre changement qu'une multiplication par le facteur $\varphi'(\bar{x})\psi'(\bar{y})$. Parmi les invariants

$$H_{ij}, K_{ij} \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right), \quad I_i, J_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1)$$

de l'équation (20) ce sont seulement les $2q$ invariants

$$H_{i, q-i}, K_{i, q-i} \quad (i = 0, 1, \dots, q-1)$$

qui, à un facteur près, se reproduisent, quand on effectue la substitution $x = \varphi(\bar{x})$, $y = \psi(\bar{y})$. Mais il y a une différence très importante entre les invariants h et k de l'équation (1) et les invariants $H_{i, q-i}, K_{i, q-i}$ ($i = 0, 1, \dots, q-1$) de l'équation (20). Deux équations de la forme (1) qui ont les mêmes valeurs des deux invariants h et k sont équivalentes; tout invariant de l'équation (1) s'exprime au moyen de h et de k . Mais si deux équations de la forme (20) ont les mêmes valeurs des $2q$ invariants $H_{i, q-i}, K_{i, q-i}$ ($i = 0, 1, \dots, q-1$), il n'en suit nullement qu'elles soient équivalentes; on ne peut point exprimer tous les invariants de l'équation (20) au moyen des invariants $H_{i, q-i}, K_{i, q-i}$ ($i = 0, 1, \dots, q-1$) [voir page 73].

L'importance de l'emploi de la notation des invariants h et k consiste dans ce fait que les invariants des équations obtenues par l'application des transformations de Laplace à l'équation (1) sont aussi des invariants de l'équation (1) et s'expriment par suite au moyen de h et de k . Nous allons maintenant examiner si c'est le même cas pour l'équation (20). Si nous appliquons une transformation (t_1)

$$z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{\alpha_0} \right), \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0,$$

à l'équation (20), nous obtiendrons une équation dont les invariants dépendent de α_0 ; par conséquent, les invariants de l'équation qui définit z_1 ne sont pas de règle des invariants de l'équation (20). De même, si nous appliquons une transformation (t_i) ou (t_{-i}) , où $q > i \geq 1$, nous arriverons à des équations dont les invariants ne sont pas en général des invariants de l'équation (20). Ce sont seulement les transformations (T_1) et (T_{-1}) [pages 37 et 56] qui sont toujours complètement déterminées, et ce n'est qu'en appliquant les transformations (T_1) et (T_{-1}) à l'équation (20) que nous pouvons attendre à arriver à une équation dont les invariants sont aussi des invariants de l'équation (20). La transformation (T_1) de l'équation (20) est

$$z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}.$$

Si nous effectuons la substitution $z = \lambda \bar{z}$, l'équation (20) pourra s'écrire

$$\sum_{i=0}^q \left(\bar{A}_i \frac{\partial^{i+1} \bar{z}}{\partial x \partial y^i} + \bar{B}_i \frac{\partial^i \bar{z}}{\partial y^i} \right) = 0, \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^q \bar{A}_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} (\lambda \alpha).$$

La transformation (T_1) de cette équation est

$$\bar{z}_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \bar{z}}{\partial y^i},$$

et nous avons par suite $\bar{z}_q = \frac{1}{\lambda} z_q$. Il en suit que les invariants de l'équation (E_1) sont aussi des invariants de l'équation (E) , ce qui est évidemment le cas soit que l'équation (E_1) soit d'ordre n ou d'ordre inférieur à n . Si nous appliquons la transformation (T_1) plusieurs fois de suite à l'équation (20), nous obtiendrons donc une série d'équations (E_1) , (E_2) , (E_3) , ... dont les invariants sont des fonctions de I_i , H_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$). Comme les équations (E_1) et (E'_{-1}) sont adjointes, abstraction faite d'un facteur, les invariants de l'équation (E'_{-1}) sont aussi des invariants de l'équation (E') . Si nous appliquons la transformation (T_{-1}) à l'équation (23), nous obtiendrons ainsi une équation dont les invariants sont aussi des invariants de l'équation (23). Il en suit que si l'on applique la transformation (T_{-1}) répétée à l'équation (20), l'on obtiendra une série d'équations (E_{-1}) , (E_{-2}) , (E_{-3}) ... d'ordre n au plus, dont les invariants ne dépendent que de I_i , H_i , ($i = 0, 1, \dots, q-1$). La transformation (T_{-1}) peut s'écrire

$$z_{-q} = \sum_{i=1}^q c_i \mathcal{E}_i(z),$$

les coefficients c_i ($i = 1, 2, \dots, q$) étant complètement déterminés (voir la proposition 11). Le fait que les invariants de l'équation (E_{-1}) sont des invariants de l'équation (E) signifie que les invariants de l'équation

$$\sum_{i=0}^q c_i \mathcal{E}_i(v) = 0,$$

où c_i ($i = 1, 2, \dots, q$) remplissent les conditions données dans la proposition 11, sont aussi des invariants de l'équation (20).

Je vais maintenant, comme Darboux, étendre la désignation (E) , (E_1) , (E_2) , ..., (E_{-1}) , (E_{-2}) , ..., (E') , (E'_1) , (E'_2) , ..., (E'_{-1}) , (E'_{-2}) , ... aux équations équivalentes. Les équations (E_i) et (E'_{-i}) sont par suite des équations adjointes (c'est pourtant à remarquer que si l'équation (E_i) , $i > 0$, est d'ordre inférieur à n , le second membre de l'équation (E'_{-i}) n'est pas nul).

Je désigne les invariants I_i , H_i , J_i , K_i , H_{is} , K_{is} de l'équation (E_j) ($j \leq 0$) par $[I_i]_j$, $[H_i]_j$, $[J_i]_j$, $[K_i]_j$, $[H_{is}]_j$, $[K_{is}]_j$.

Nous avons trouvé que les invariants de toutes les équations (E_j) ($j \leq 0$) ne dépendent que des $2q$ invariants I_i , H_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$). Si le problème de déterminer les invariants de l'équation (E_1) au moyen des invariants de l'équation (E) était résolu, nous n'aurions plus besoin d'appliquer la transformation (T_1) pour reconnaître si l'équation (E) admet des X-intégrales; au lieu de cela, nous pourrions en partant des invariants de l'équation (E) calculer successivement les invariants des équations (E_1) , (E_2) , (E_3) , Et à l'aide des relations entre les invariants des équations (E) et (E_1) nous obtiendrions, en remplaçant

$$I_i, H_{ij}, J_i, K_{ij}, [I_i]_1, [H_{ij}]_1, [J_i]_1, [K_{ij}]_1$$

par

$$J_i, K_{ij}, I_i, H_{ij}, [J_i]_{-1}, [K_{ij}]_{-1}, [I_i]_{-1}, [H_{ij}]_{-1},$$

les relations entre les invariants des équations (E) et (E_{-1}) , puisque les équations (E'_1) et (E_{-1}) sont adjointes. Calculer les invariants de l'équation (E_{-1}) en fonction des invariants de l'équation (E) , voilà donc le même problème que de déterminer les invariants de l'équation (E_1) en fonction des invariants de l'équation (E) . Si le problème de déterminer les invariants de l'équation (E_1) en fonction des invariants de l'équation (E) était résolu, nous aurions ainsi pu reconnaître, sans appliquer les transformations de Laplace, à quel point l'intégration de l'équation (20) peut être simplifiée par la méthode de Laplace.

Nous voyons ainsi que, pour l'application pratique de la méthode de Laplace, il est d'une grande importance de trouver les relations qu'il y a entre les invariants des équations (E) et (E_1) . L'équation (E_1) s'obtient en différentiant les équations

(46) et (21) et en éliminant z et ces dérivées entre les équations obtenues [voir page 38]. Pour abrégé, désignons le premier membre de l'équation (46') par

$$\Phi_j(z_q).$$

Si l'équation (E_1) est d'ordre $n - s$, elle peut s'écrire

$$\Phi_{n-s}(z_q) = 0.$$

Si nous supposons $A_{q-1} = 0$, les coefficients de l'équation obtenue sont donnés en fonction de I_i , H_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$) et de B_q . En partant de ces coefficients l'on pourrait par suite calculer les invariants de l'équation (E_1) en fonction de I_i , H_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$); mais si on calculait les invariants de l'équation (E_1) d'une telle manière, on obtiendrait des relations très compliquées entre les invariants des équations (E) et (E_1) .

Je vais maintenant essayer de trouver des relations plus simples entre les invariants des équations (E_1) et (E) . Supposons $A_{q-1} = 0$; nous avons alors $H_{ij} = P_{ij}$. En différentiant l'équation (46) $j-1$ fois par rapport à y et l'équation (21) $j-2$ fois par rapport à y et en éliminant entre les équations obtenues les quantités $\frac{\partial^{q+j-2} z}{\partial y^{q+j-2}}, \frac{\partial^{q+j-3} z}{\partial y^{q+j-3}}, \dots, \frac{\partial^{q-j+1} z}{\partial y^{q-j+1}}$, l'on obtiendra l'équation

$$\Phi_j(z_q) = \sum_{i=0}^{q-j} H_{ij} \frac{\partial^i z}{\partial y^i}.$$

Les expressions $\Phi_j(z_q)$ ($j = 1, 2, \dots, q+1$) peuvent être obtenues de la manière suivante: nous avons

$$\Phi_1(z_q) \equiv \frac{\partial z_q}{\partial x} + B_q z_q,$$

$$(60) \quad \Phi_2(z_q) \equiv \begin{vmatrix} H_{q-1} & H_{q-2} + H'_{q-1} & \frac{\partial}{\partial y} \Phi_1(z_q) \\ 0 & H_{q-1} & \Phi_1(z_q) \\ 1 & 0 & z_q \end{vmatrix}$$

et

$$(60') \quad \Phi_{j+1}(z_q) \equiv \frac{1}{(H_{q-j+1, j-1})^2} \begin{vmatrix} H_{q-j, j} & H_{q-j-1, j} + H'_{q-j, j} & \frac{\partial}{\partial y} \Phi_j(z_q) \\ 0 & H_{q-j, j} & \Phi_j(z_q) \\ H_{q-j+1, j-1} & H_{q-j, j-1} & \Phi_{j-1}(z_q) \end{vmatrix} \quad (q \geq j \geq 2).$$

pourvu que $H_{q-j+1, j-1} \neq 0$, ce qui suit de l'équation (59). A l'aide de ces formules, nous obtiendrons les coefficients de z_q et de ces dérivées dans les expressions

$$\Phi_{j+1}(z_q) \quad (j = 0, 1, \dots, q)$$

en fonction de

$$B_q, H_{q-i, i} \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad H_{q-i-1, i} \quad (i = 1, 2, \dots, q-1),$$

pourvu que $H_{q-i, i} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, q$). Si la condition

$$H_{q-i, i} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

n'est pas remplie, on peut, en tenant compte des équations (59), (59') etc., obtenir les coefficients de z_q et de ces dérivées dans les expressions $\Phi_j(z_q)$ ($j = 1, 2, \dots, q+1$) en fonction de B_q et des invariants de l'équation (20) d'une manière un peu modifiée.

Nous allons maintenant essayer de déterminer les coefficients de z_q et de ses dérivées dans les expressions $\Phi_j(z_q)$ ($j = 1, 2, \dots, q+1$) en fonction des coefficients de l'équation qui définit z_q . Puis nous allons évaluer les deux expressions des coefficients en question. De cette manière, nous obtiendrons des relations entre les invariants des équations (E) et (E_1) .

Supposons que l'équation (E_1) soit d'ordre n . Nous écrivons l'équation qui définit z_q

$$(61) \quad \mathfrak{F}_0(z_q) \equiv \sum_{i=0}^q \left([A_i]_1 \frac{\partial^{i+1} z_q}{\partial x \partial y^i} + [B_i]_1 \frac{\partial^i z_q}{\partial y^i} \right) = 0, \quad [A_q]_1 = 1,$$

et en partant de cette équation nous formons les expressions $\mathfrak{F}_i(z_q)$ ($i = 1, 2, \dots, q$) de la même manière que les expressions $\mathfrak{G}_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, q$) ont été formées de l'équation (20) [page 49]. Si

$$\beta_0 Y^{r+1} + \beta_1 Y^{r+1} + \dots + \beta_r Y$$

est une Y -intégrale de rang $r+1$ de l'équation (20) et que cette Y -intégrale soit substituée dans les équations

$$z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}, \quad \Phi_j(z_q) = \sum_{i=0}^{q-j} H_{ij} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \quad (j = 1, 2, \dots, q),$$

nous trouvons que la transformation $\xi = \Phi_j(z_q)$, appliquée à l'équation (61), diminue le rang de l' Y -intégrale de j unités. J'ai déjà (pages 63, 64) montré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=0}^{q-1} \left(T_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right),$$

appliquée à une équation qui admet une Y -intégrale, diminue le rang de l' Y -intégrale de j unités, est que la transformation soit de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{G}_i(z),$$

où les coefficients c_i ($i = 1, 2, \dots, q$) vérifient les $j-1$ relations linéaires et homogènes qu'on obtient en éliminant les $j-1$ coefficients c_i ($i = q+1, q+2, \dots, q+j-1$) entre les $2(j-1)$ relations (56'). Il en résulte que l'expression $\Phi_j(z_q)$, qui ne renferme de dérivées de z que jusqu'à l'ordre j au plus, est de la forme

$$(62) \quad \Phi_j(z_q) \equiv \sum_{i=q-j+1}^q e_{ij} \mathfrak{F}_i(z_q),$$

où les coefficients e_{ij} ($i = q-j+1, q-j+2, \dots, q$), à un facteur près, sont déterminées par les $j-1$ relations linéaires et homogènes qu'on obtient en éliminant les $j-1$ coefficients e_{ij} ($i = q+1, q+2, \dots, q+j-1$) entre les $2(j-1)$ relations

$$(63) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^{q+j-1} (-1)^i \left[e_{i+1,j} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} [Q_{i+k-h}]_1^{(k)} \right] = 0 \\ \sum_{i=0}^{q+h} (-1)^i \left[e_{i+1,j} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} [C_{i+k-h}]_1^{(k)} \right] = 0 \end{cases} \quad (h = 0, 1, \dots, j-2),$$

où $e_{ij} = 0$ ($i \leq q - j$) et où les coefficients $[C_i]_1$ et $[Q_i]_1$ ont été formés des coefficients de l'équation (61) de la même manière que les coefficients C_i et Q_i ont été formés des coefficients de l'équation (20) [pages 25, 26]. Nous sommes partis de ce que l'équation (20) admet une Y -intégrale, mais la définition en question des expressions $\Phi_j(z_q)$ ($j = 1, 2, \dots, q$) est valable aussi dans le cas où l'équation (20) n'admet pas une Y -intégrale (voir pages 64, 65). — Il est aisé de voir que la définition en question est valable aussi pour l'expression $\Phi_{q+1}(z_q)$, car les conditions (63) où $j = q + 1$ nous donnent $e_{i, q+1} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, q$).

Si nous supposons que l'équation (E_1) soit d'ordre $p + 1$ ($p < q$), on voit aisément qu'on peut définir les expressions $\Phi_j(z_q)$ ($j = 1, 2, \dots, p + 1$) d'une manière un peu modifiée (en remplaçant q par p); l'expression $\Phi_j(z_q)$ est de la forme

$$\Phi_j(z_q) \equiv \sum_{i=p-j+1}^p e_{ij} \mathfrak{F}_i(z_q),$$

l'équation qui définit z_q étant désignée $\mathfrak{F}_0(z_q) = 0$.

Nous avons ainsi obtenu deux définitions différentes des expressions $\Phi_j(z_q)$ ($j = 1, 2, \dots, q + 1$). D'un côté, les expressions $\Phi_{j+1}(z_q)$ ($j = 0, 1, \dots, q$) peuvent être obtenues par les formules (60) et (60'), et de l'autre côté, les expressions $\Phi_j(z_q)$ ($j = 1, 2, \dots, q + 1$) peuvent se mettre sous la forme (62), où les j coefficients e_{ij} ($i = q - j + 1, q - j + 2, \dots, q$) sont déterminées, à un facteur près, par les relations (63). En égalant les deux formules des expressions $\Phi_j(z_q)$ ($j = 1, 2, \dots, q + 1$), nous allons obtenir des relations entre les invariants de l'équation (E) et ceux de l'équation (E_1) .

Supposons d'abord

$$H_{q-i, i} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Les relations entre les coefficients e_{ij} ($i = q - j + 1, q - j + 2, \dots, q$), qu'on obtient des relations (63), peuvent s'écrire (voir page 53)

$$(63') \quad \sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i e_{i+1, j} [Q_{ih}]_1 = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j - 1),$$

où $e_{ij} = 0$ ($i \leq q - j$) et où les coefficients $[Q_{ij}]_1$ ont été formés des coefficients de l'équation (61) de la même manière que les coefficients Q_{ij} ont été formés des coefficients de l'équation (20) (page 26). Les équations (60) et (60') nous donnent

$$e_{q-j+1, j} = (-1)^{j-1} H_{q-j+1, j-1}.$$

— Comme $\Phi_1 = \mathfrak{F}_q = \mathcal{E}_q$, nous avons $[B_q]_1 = B_q$. L'équation (60) nous donnent

$$\Phi_2 = -H_{q-1} \frac{\partial}{\partial y} \Phi_1 + (H_{q-2} + H'_{q-1}) \Phi_1 + (H_{q-1})^2.$$

Puisque $C_{q-1} = -A_{q-1}$, $Q_{q-1} = K_{q-1}$ (selon la définition), nous avons (voir page 49)

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{E}_q(z) = \mathcal{E}_{q-1}(z) - A_{q-1} \mathcal{E}_q(z) + K_{q-1} z.$$

Il en suit

$$\Phi_2 = -H_{q-1} (\mathfrak{F}_{q-1} - [A_{q-1}]_1 \mathfrak{F}_q + [K_{q-1}]_1) + (H_{q-2} + H'_{q-1}) \mathfrak{F}_q + (H_{q-1})^2$$

Mais de l'autre côté [selon les équations (62), (63)], nous avons

$$\Phi_2 = e_{q-1,2} \mathfrak{F}_{q-1} + e_{q,2} \mathfrak{F}_q, \quad \text{où} \quad e_{q-1,2} [Q_{q-2}]_1 = e_{q,2} [Q_{q-1}]_1.$$

Ainsi nous aurons

$$-H_{q-1} [K_{q-1}]_1 + (H_{q-1})^2 = 0, \quad -\frac{H_{q-2} + H_{q-1} + H_{q-1} [A_{q-1}]_1}{H_{q-1}} = \frac{[Q_{q-2}]_1}{[Q_{q-1}]_1}.$$

Comme $H_{q-1} \neq 0$, il en suit

$$H_{q-1} = [K_{q-1}]_1, \quad H_{q-2} + H_{q-1} + [Q_{q-2}]_1 = -H_{q-1} [A_{q-1}]_1.$$

— En général, nous avons selon l'équation (60')

$$\Phi_{r+1} = \rho_{r+1} \frac{\partial}{\partial y} \Phi_r + \sigma_{r+1} \Phi_r + \tau_{r+1} \Phi_{r-1} \quad (q \geq r \geq 2),$$

où

$$\begin{aligned} \rho_{r+1} &= -\frac{H_{q-r, r}}{H_{q-r+1, r-1}}, & \sigma_{r+1} &= \frac{H_{q-r-1, r} + H'_{q-r, r}}{H_{q-r+1, r-1}} - \frac{H_{q-r, r} H_{q-r, r-1}}{(H_{q-r+1, r-1})^2}, \\ \tau_{r+1} &= \left(\frac{H_{q-r, r}}{H_{q-r+1, r-1}} \right)^2. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\Phi_r = \sum_{i=q-r+1}^q e_{ir} \mathfrak{F}_i, \quad e_{q-r+1, r} = (-1)^{r-1} H_{q-r+1, r-1},$$

où les coefficients e_{ir} ($i = q-r+1, q-r+2, \dots, q$) remplissent les $r-1$ conditions qu'on obtient des équations (63) où $j = r$. En différentiant par rapport à y , nous aurons

$$\frac{\partial}{\partial y} \Phi_r = \sum_{i=q-r}^{q-1} (e'_{ir} + e_{i+1, r}) \mathfrak{F}_i + e'_{qr} \mathfrak{F}_q + \sum_{i=q-r+1}^q (-1)^{q-i} e_{ir} [C_{i-1}]_1 \mathfrak{F}_q,$$

la désignation $e'_{ir} = \frac{\partial e_{ir}}{\partial y}$ étant employée, et les équations (63) où $j = r$ nous donnent

$$\frac{\partial}{\partial y} \Phi_r = \sum_{i=q-r}^q (e'_{ir} + e_{i+1, r}) \mathfrak{F}_i.$$

De plus, nous avons

$$\Phi_{r-1} = \sum_{i=q-r+2}^q e_{i, r-1} \mathfrak{F}_i, \quad e_{q-r+2, r-1} = (-1)^r H_{q-r+2, r-2},$$

où les coefficients $e_{i, r-1}$ ($i = q-r+2, q-r+3, \dots, q$) remplissent les $r-2$ conditions que l'on obtient des équations (63) où $j = r-1$. Ainsi nous pouvons écrire

$$\Phi_{r+1} = \sum_{i=q-r}^q [\rho_{r+1} (e'_{ir} + e_{i+1, r}) + \sigma_{r+1} e_{ir} + \tau_{r+1} e_{i, r-1}] \mathfrak{F}_i \quad (q \geq r \geq 2)$$

Mais de l'autre côté, nous avons

$$\Phi_{r+1} = \sum_{i=q-r}^q e_{i, r+1} \mathfrak{F}_i$$

où les coefficients $e_{i, r+1}$ ($i = q - r, q - r + 1, \dots, q$) vérifient les r relations qu'on obtient des équations (63) où $j = r + 1$. Nous avons ainsi trouvé

$$(64) \quad e_{i, r+1} = \rho_{r+1} (e'_{ir} + e_{i+1, r}) + \sigma_{r+1} e_{ir} + \tau_{r+1} e_{i, r-1} \quad (i = q - r, q - r + 1, \dots, q).$$

Les équations (63) où $j = r$ nous donnent [comparer page 53]

$$\sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i (e_{i+2, r} + e'_{i+1, r}) [Q_{ih}]_1 = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, r-2),$$

où $e_{ir} = 0$ ($i \leq q - r$). En partant de la définition des coefficients e_{ir} , $e_{i, r-1}$ et en tenant compte des relations (64), nous trouvons ainsi

$$\sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i e_{i+1, r+1} [Q_{ih}]_1 = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, r-2),$$

où $e_{i, r+1} = 0$ ($i \leq q - r - 1$). Mais en partant directement de la définition des coefficients $e_{i, r+1}$, nous aurons

$$\sum_{i=0}^q (-1)^i e_{i+1, r+1} [Q_{ih}]_1 = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, r).$$

En égalant les deux expressions de $\Phi_{r+1}(z_q)$, nous obtiendrons par suite les deux équations

$$\sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i e_{i+1, r+1} [Q_{ih}]_1 = 0 \quad (h = r-1, r),$$

où $e_{i, r+1} = 0$ ($i \leq q - r - 1$), qui donnent deux relations entre les coefficients de l'équation (20) et ceux de l'équation (61). En tenant compte des équations (64), les deux relations obtenues peuvent s'écrire

$$(65) \quad \left. \begin{aligned} & \rho_{r+1} \sum_{i=0}^{q-r+1} (-1)^i (e_{i+2, r} + e'_{i+1, r}) [Q_{i, r-1}]_1 + \\ & + \tau_{r+1} \sum_{i=0}^{q-r+1} (-1)^i e_{i+1, r-1} [Q_{i, r-1}]_1 = 0, \end{aligned} \right\} (q \geq r \geq 2)$$

$$(66) \quad \rho_{r+1} \sum_{i=0}^{q-r} (-1)^i (e_{i+2, r} + e'_{i+1, r}) [Q_{i, r}]_1 + (-1)^{q-r} \sigma_{r+1} e_{q-r+1, r} [Q_{q-r, r}]_1 = 0,$$

où $e_{ir} = 0$ ($i \leq q - r$) et où $e_{i, r-1} = 0$ ($i \leq q - r + 1$). En tenant compte des équations (63) où $j = r$, l'équation (65) peut s'écrire

$$\rho_{r+1} e_{q-r+1, r} \frac{[Q_{q-r, r}]_1 [Q_{q-r+2, r-2}]_1}{[Q_{q-r+1, r-1}]_1} = \tau_{r+1} e_{q-r+2, r-1} [Q_{q-r+1, r-1}]_1,$$

pourvu que

$$r > 2, [Q_{q-r+1, r-1}]_1 [Q_{q-r+2, r-2}]_1 \neq 0;$$

et dans le cas où

$$r = 2, [Q_{q-1}]_1 \neq 0,$$

l'équation (65) peut s'écrire

$$\rho_{r+1} e_{q-r+1, r} \frac{[Q_{q-2, 2}]}{[Q_{q-1}]_1} = \tau_{r+1} e_{q-r+2, r-1} [Q_{q-1}]_1.$$

En substituant

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{r+1}}{\tau_{r+1}} &= - \frac{H_{q-r+1, r-1}}{H_{q-r, r}}, & e_{q-r+1, r} &= (-1)^{r-1} H_{q-r+1, r-1}, \\ e_{q-r+2, r-1} &= (-1)^r H_{q-r+2, r-2} & (r > 2) \\ &= 1 & (r = 2) \end{aligned}$$

dans ces équations, nous obtiendrons

$$H_{q-1} \frac{[Q_{q-2, 2}]_1}{[Q_{q-1}]_1} = \frac{H_{q-2, 2}}{H_{q-1}} [Q_{q-1}]_1, \quad \text{si } \begin{cases} r = 2 \\ [Q_{q-1}]_1 \neq 0, \end{cases}$$

et

$$\frac{[Q_{q-r, r}]_1 [Q_{q-r+2, r-2}]_1}{([Q_{q-r+1, r-1}]_1)^2} = \frac{H_{q-r, r} H_{q-r+2, r-2}}{(H_{q-r+1, r-1})^2}, \quad \text{si } \begin{cases} r > 2 \\ [Q_{q-r+1, r-1}]_1 [Q_{q-r+2, r-2}]_1 \neq 0. \end{cases}$$

Nous avons déjà trouvé $H_{q-1} = [Q_{q-1}]_1$ (page 80). Comme nous avons supposé $H_{q-i, i} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, q$), nous obtiendrons de l'équation (65) où $r = 2$

$$[Q_{q-2, 2}]_1 = H_{q-2, 2},$$

et de l'équation (65) où $r = 3$, nous obtiendrons

$$[Q_{q-3, 3}]_1 = H_{q-3, 3}$$

etc. Les équations (65) ($r = 2, 3, \dots, q$) nous donnent par suite

$$[Q_{q-i, i}]_1 = H_{q-i, i} \quad (i = 2, 3, \dots, q).$$

Nous avons ainsi obtenu les relations

$$(67) \quad [K_{q-i, i}]_1 = H_{q-i, i} \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

puisque (selon la définition) nous avons $Q_{q-i, i} = K_{q-i, i}$. — Les q relations obtenues sont analogues à la relation

$$k_1 = h$$

entre les invariants de l'équation (1) [page 69]. — Nous avons

$$e_{q-r+1, r} = (-1)^{r-1} H_{q-r+1, r-1},$$

et les équations (63) où $j = r$ nous donnent

$$e_{q-r+2, r} [Q_{q-r+1, r-1}]_1 - e_{q-r+1, r} [Q_{q-r, r-1}]_1 = 0;$$

en substituant ces valeurs de $e_{q-r+1, r}$ et de $e_{q-r+2, r}$ et les valeurs de ρ_{r+1} , σ_{r+1}

(voir page 80) dans l'équation (66) et en tenant compte des relations $[Q_{q-i, i}]_1 = H_{q-i, i}$ ($i = r-1, r$), nous pouvons écrire l'équation (66) sous la forme

$$\frac{H_{q-r, r-1} + H'_{q-r+1, r-1} + [Q_{q-r, r-1}]_1}{H_{q-r+1, r-1}} = \frac{H_{q-r-1, r} + H'_{q-r, r} + [Q_{q-r-1, r}]_1}{H_{q-r, r}}.$$

Nous avons déjà trouvé

$$H_{q-2} + H'_{q-1} + [Q_{q-2}]_1 = -H_{q-1} [A_{q-1}]_1$$

(page 80). Ainsi les équations (66) ($r = 2, 3, \dots, q$) nous donnent les relations

$$\frac{H_{q-r-1, r} + H'_{q-r, r} + [Q_{q-r-1, r}]_1}{H_{q-r, r}} = -[A_{q-1}]_1 \quad (r = 2, 3, \dots, q).$$

Pour $r = q$, cette relation devient $H'_{0q} = -[A_{q-1}]_1 H_{0q}$. Nous avons ainsi obtenu les $q-1$ relations

$$\frac{H_{q-r-1, r} + H'_{q-r, r} + [Q_{q-r-1, r}]_1}{H_{q-r, r}} = \frac{H'_{0q}}{H_{0q}} \quad (r = 1, 2, \dots, q-1).$$

D'après la définition de Q_{ij} , nous avons

$$Q_{q-r-1, r} = K_{q-r-1, r} - \frac{q-r}{q} A_{q-1} K_{q-r, r}.$$

Par suite, les relations obtenues peuvent s'écrire :

$$(67') \quad \frac{H_{q-r-1, r} + H'_{q-r, r} + [K_{q-r-1, r}]_1}{H_{q-r, r}} = \frac{r}{q} \frac{H'_{0q}}{H_{0q}} \quad (r = 1, 2, \dots, q-1).$$

— Nous avons

$$A_{q-1} = 0, \quad [B_q]_1 = B_q, \quad H_{0q} [A_{q-1}]_1 = -H'_{0q},$$

et d'après la définition de H_{q-1} et de K_{q-1} , nous avons

$$\frac{\partial A_{q-1}}{\partial x} - q \frac{\partial B_q}{\partial y} = H_{q-1} - K_{q-1}.$$

Il en suit

$$(67'') \quad [H_{q-1}]_1 = 2H_{q-1} - K_{q-1} - \frac{\partial^2 \log H_{0q}}{\partial x \partial y}.$$

Cette relation est analogue à la relation

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y},$$

qui a lieu entre les invariants de l'équation (1) [page 69].

En comparant les deux définitions différentes des expressions $\Phi_j(z_q)$ ($j = 1, 2, \dots, q+1$), nous avons ainsi obtenu les $2q$ relations (67), (67'), (67''), lesquelles lient les invariants de l'équation (E) avec ceux de l'équation (E₁).

A l'aide de ces $2q$ relations, les $2q$ invariants

$$[H_{q-i-1}]_1, [K_{q-i, i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad [K_{q-i-1, i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q-1)$$

s'expriment en fonction de

$$(68) \quad K_{q-1}, \quad H_{q-i, i} \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad H_{q-i-1, i} \quad (i = 1, 2, \dots, q-1)$$

d'une manière très simple, et inversement. Comme nous n'avons trouvé, en comparant les deux définitions différentes des expressions $\Phi_j(z_q)$ ($j = 1, 2, \dots, q+1$), que ces $2q$ relations entre les invariants des équations (E) et (E_1) , il faut que tous les invariants de l'équation (E_1) puissent s'exprimer au moyen des invariants $[H_{q-1}]_1, [K_{q-i,i}]_1$ ($i = 1, 2, \dots, q$), $[K_{q-i-1,i}]_1$ ($i = 1, 2, \dots, q-1$).

En d'autres termes, tous les invariants de l'équation (20) s'expriment au moyen de

$$(68') \quad H_{q-1}, \quad K_{q-i,i} \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad K_{q-i-1,i} \quad (i = 1, 2, \dots, q-1),$$

pourvu que $K_{q-i,i} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, q$). C'est ce qui résulte aussi des formules

$$(69) \quad K_{i2} = \begin{vmatrix} K_{q-1} & K_{q-2} + K'_{q-1} & K_{i-1} + K'_i \\ 0 & K_{q-1} & K_i \\ 1 & 0 & J_i \end{vmatrix} \quad (i = 0, 1, \dots, q-2),$$

$$(69') \quad K_{i,j+1} (K_{q-j+1,j-1})^2 = \begin{vmatrix} K_{q-j,j} & K_{q-j-1,j} + K'_{q-j,j} & K_{i-1,j} + K'_{ij} \\ 0 & K_{q-j,j} & K_{ij} \\ K_{q-j+1,j-1} & K_{q-j,j-1} & K_{i,j-1} \end{vmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} j \geq 2 \\ i = 0, 1, \dots, q-j-1 \end{matrix} \right)$$

[voir l'équation (59)]. A l'aide des équations (69'), on peut calculer les invariants $K_{i,j-1}$ ($i = 0, 1, \dots, q-j-1$), si l'on connaît les invariants

$$K_{ir} \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-r \\ r = j, j+1, \dots, q \end{matrix} \right), \quad K_{q-j+1,j-1}, \quad K_{q-j,j-1}.$$

Et à l'aide des équations (69), nous pouvons calculer les invariants J_i ($i = 0, 1, \dots, q-2$), si nous connaissons les invariants $K_{ij} \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right)$. Ainsi nous pouvons calculer les invariants

$$K_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1), \quad J_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-2)$$

en partant des invariants

$$K_{q-i,i} \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad K_{q-i-1,i} \quad (i = 1, 2, \dots, q-1).$$

A l'aide de l'égalité $J_{q-1} = K_{q-1} - H_{q-1}$, nous pouvons calculer J_{q-1} . En partant des invariants

$$J_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1), \quad K_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1),$$

nous pouvons ensuite calculer les invariants

$$I_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1), \quad H_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1)$$

(voir page 72). Nous avons ainsi prouvé que tous les invariants de l'équation (20) s'expriment au moyen des invariants (68'), pourvu que $K_{q-i,i} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, q$).

Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant: par les équations (67), (67'), (67'') les $2q$ invariants

$$[H_{q-1}]_1, \quad [K_{q-i,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad [K_{q-i-1,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q-1)$$

s'expriment d'une manière très simple au moyen des invariants (68); en partant des invariants

$$[H_{q-1}]_1, \quad [K_{q-i,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad [K_{q-i-1,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q-1),$$

on peut calculer les invariants

$$[K_{q-1}]_1, \quad [H_{q-i,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad [H_{q-i-1,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q-1);$$

si $[H_{q-i,i}]_1 \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, q$), on peut en partant des invariants obtenus calculer les invariants de l'équation (E_2) ; de cette manière on peut continuer. Pour l'application pratique de la méthode de Laplace, il serait évidemment d'importance de pouvoir exprimer sous une forme simple les invariants (68) au moyen des invariants (68'), c'est-à-dire déduire les invariants (68) des invariants (68') sans calculer tous les invariants K_{ij} , J_i , H_i , I_i . Mais je n'ai pas réussi à obtenir les relations qui lient les invariants (68) et les invariants (68') sous une forme simple.

Jusqu'ici nous avons supposé $H_{q-r,r} \neq 0$ ($r = 1, 2, \dots, q$). Il reste à rechercher les relations entre les invariants des équations (E) et (E_1) , si cette condition n'est pas remplie.

Supposons

$$H_{q-r,r} \neq 0 \quad (r = 1, 2, \dots, p), \quad H_{q-r,r} = 0 \quad (r = p+1, p+2, \dots, q).$$

L'équation (E) admet $q-p$ X -intégrales distinctes de rang 1, et l'équation (E_1) est d'ordre $p+1$. Nous écrivons l'équation (E_1) :

$$\mathfrak{F}_0(z_q) = \sum_{i=0}^p \left([A_i]_1 \frac{\partial^{i+1} z_q}{\partial x \partial y^i} + [B_i]_1 \frac{\partial^i z_q}{\partial y^i} \right) = 0, \quad [A_p]_1 = 1.$$

En comparant les deux définitions des expressions $\Phi_r(z_q)$ ($r = 1, 2, \dots, p+1$), nous aurons de la même manière qu'auparavant les $2p+1$ relations

$$[B_p]_1 = B_q,$$

$$(70) \quad [K_{p-r,r}]_1 = H_{q-r,r} \quad (r = 1, 2, \dots, p),$$

$$H_{q-r-1,r} + H'_{q-r,r} + [Q_{p-r-1,r}]_1 = -[A_{p-1}]_1 H_{q-r,r} \quad (r = 1, 2, \dots, p).$$

Comme

$$[Q_{p-r-1,r}]_1 = [K_{p-r-1,r}]_1 - \frac{p-r}{p} [A_{p-1}]_1 [K_{p-r,r}]_1,$$

nous aurons

$$(70') \quad \frac{H_{q-r-1,r} + H'_{q-r,r} + [K_{p-r-1,r}]_1}{H_{q-r,r}} = \frac{r}{p} \frac{H_{q-p-1,p} + H'_{q-p,p}}{H_{q-p,p}},$$

$$(r = 1, 2, \dots, p-1)$$

D'après la définition des invariants, nous avons

$$\frac{\partial A_{q-1}}{\partial x} - q \frac{\partial B_q}{\partial y} = H_{q-1} - K_{q-1}, \quad \frac{\partial [A_{p-1}]_1}{\partial x} - p \frac{\partial [B_p]_1}{\partial y} = [H_{p-1}]_1 - [K_{p-1}]_1.$$

Comme

$$A_{q-1} = 0, \quad [B_p]_1 = B_q, \quad [A_{p-1}]_1 H_{q-p, p} = - (H_{q-p-1, p} + H'_{q-p, p}),$$

nous aurons

$$(70'') \quad [H_{p-1}]_1 - [K_{p-1}]_1 = \frac{p}{q} (H_{q-1} - K_{q-1}) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{H_{q-p-1, p} + H'_{q-p, p}}{H_{q-p, p}}.$$

Nous avons ainsi obtenu les $2p$ relations (70), (70'), (70'') entre les invariants des équations (E) et (E_1) . — Ces $2p$ relations peuvent aussi être obtenues en mettant l'équation (E) sous la forme (37) et en considérant la transformation (T_1) comme composée de deux transformations complètement déterminées (page 39). — Par les relations (70), (70'), (70'') les invariants

$$[H_{p-1}]_1, \quad [K_{p-r, r}]_1 \quad (r = 1, 2, \dots, p), \quad [K_{p-r-1, r}]_1 \quad (r = 1, 2, \dots, p-1)$$

se déduisent des invariants de l'équation (E) , et tous les invariants de l'équation (E_1) sont des fonctions des invariants obtenus.

Supposons enfin

$$H_{q-j, j} \neq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s-1, \quad s+r, \dots, q), \quad H_{q-j, j} = 0 \quad (j = s, s+1, \dots, s+r-1) \\ (s+r-1 < q).$$

L'équation (E_1) est d'ordre n . Soit $s > 1$. En comparant les deux définitions des expressions $\Phi_j(z_q)$ ($j = 1, 2, \dots, s$), nous aurons de la même manière qu'auparavant les $2s-1$ relations

$$[B_q]_1 = B_q, \quad [K_{q-j, j}]_1 = H_{q-j, j} \quad (j = 1, 2, \dots, s-1),$$

$$H_{q-j-1, j} + H'_{q-j, j} + [Q_{q-j-1, j}]_1 = -[A_{q-1}]_1 H_{q-j, j} \quad (j = 1, 2, \dots, s-1).$$

Comme

$$H_{q-j, j} = 0 \quad (j = s, s+1, \dots, s+r-1), \quad H_{q-s+1, s-1} \neq 0,$$

et ainsi

$$H_{q-j, s} = 0 \quad (j = s, s+1, \dots, s+r-1),$$

nous pouvons déduire

$$H_{i, j+1} = 0 \quad \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j-1 \\ j = s, s+1, \dots, s+r-2 \end{matrix} \right),$$

$$H_{i, r+s} = H_{is} \left(\frac{H_{q-r-s, s}}{H_{q-s+1, s-1}} \right)^r \quad (i = 0, 1, \dots, q-r-s),$$

et nous avons

$$\Phi_{j+1} = 0 \quad (j = s, s+1, \dots, s+r-2), \quad \Phi_{r+s} = \left(\frac{H_{q-r-s, s}}{H_{q-s+1, s-1}} \right)^r \Phi_s.$$

En tenant compte des relations

$$H_{q-j, s} = 0 \quad (j = s, s+1, \dots, s+r-1),$$

nous avons de l'autre côté

$$\Phi_s = \sum_{i=q-s+1}^q e_{is} \mathcal{F}_i, \quad e_{q-s+1, s} = (-1)^{s-1} H_{q-s+1, s-1},$$

les coefficients $e_{i,s}$ ($i = q - s + 1, q - s + 2, \dots, q + r + s - 1$) vérifiant les conditions:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{q+h-1} (-1)^i \left[e_{i+1,s} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} [Q_{i+k-h}]_1^{(k)} \right] = 0, \\ \sum_{i=0}^{q+h} (-1)^i \left[e_{i+1,s} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} [C_{i+k-h}]_1^{(k)} \right] = 0, \end{cases} \quad (h = 0, 1, \dots, r + s - 2)$$

où $e_{is} = 0$ ($i \leq q - s$). Puisque $e_{q-s+1,s} \neq 0$, de ces relations nous pouvons déduire

$$[K_{is}]_1 = 0 \quad (i = q - s, q - s - 1, \dots, q - r - s + 1).$$

Puisque $[K_{q-s+1,s-1}]_1 \neq 0$, il en suit

$$[K_{i,j+1}]_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \dots, q - j - 1 \\ j = s, s + 1, \dots, s + r - 2 \end{pmatrix},$$

$$[K_{i,r+s}]_1 = [K_{is}]_1 \left(\frac{[K_{q-s-r,s}]_1}{[K_{q-s+1,s-1}]_1} \right)^r \quad (i = 0, 1, \dots, q - r - s).$$

L'expression $\Phi_{r+s+1}(z_q)$ peut se définir de la manière suivante

$$\Phi_{j+1} = \frac{1}{(H_{q-s+1,s-1})^{r+2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^{r+1}}{\partial y^{r+1}} \Phi_s & H_{q-j,s} & H_{q-j-1,s} + (r+1) H'_{q-j,s} & \dots & \sum_{k=0}^{r+1} \frac{(r+1)!}{k! (r+1-k)!} H_{q-j-k,s}^{(r+1-k)} \\ \frac{\partial^r}{\partial y^r} \Phi_s & 0 & H_{q-j,s} & \dots & \sum_{k=0}^r \frac{r!}{k! (r-k)!} H_{q-j-k,s}^{(r-k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_s & 0 & 0 & \dots & H_{q-j,s} \\ \Phi_{s-1} & H_{q-s+1,s-1} & H_{q-s,s-1} & \dots & H_{q-j,s-1} \end{vmatrix}.$$

où $j = r + s$, ce qui suit des équations (59') et des équations analogues. Pour abréger, écrivons

$$\Phi_{j+1} = \sum_{i=0}^{r+1} \sigma_{i,j+1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \Phi_s + \tau_{j+1} \Phi_{s-1} \quad (j = r + s);$$

nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{j+1}}{\sigma_{r+1,j+1}} &= - \frac{H_{q-j,s}}{H_{q-s+1,s-1}}, \\ \frac{\sigma_{r,j+1}}{\sigma_{r+1,j+1}} &= \frac{H_{q-s,s-1}}{H_{q-s+1,s-1}} - \frac{H_{q-j-1,s} + (r+1) H'_{q-j,s}}{H_{q-j,s}}. \end{aligned} \quad (j = r + s)$$

De plus nous avons

$$\Phi_{s-1} = \sum_{i=q-s+2}^q e_{i,s-1} \mathfrak{F}_i, \quad e_{q-s+2,s-1} = (-1)^s H_{q-s+2,s-2},$$

où les $s-1$ coefficients $e_{i,s-1}$ ($i = q - s + 2, q - s + 3, \dots, q$) remplissent les $s-2$ conditions que l'on obtient des équations (63) où $j = s - 1$. De la définition de l'expression $\Phi_s(z_q)$ nous pouvons déduire

$$\frac{\partial^h}{\partial y^h} \Phi_s = \sum_{i=1}^q \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} e_{i+k,s}^{(h-k)} \mathfrak{F}_i \quad (h = 0, 1, \dots, r + s - 1).$$

Par suite, nous pouvons écrire

$$\Phi_{j+1} = \sum_{i=q-r-s}^q \left[\tau_{j+1} e_{i, s-1} + \sum_{h=0}^{r+1} \left(\sigma_{h, j+1} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} e_{i+k, s}^{(h-k)} \right) \right] \mathfrak{T}_i \quad (j = r+s).$$

De l'autre côté, nous avons

$$\Phi_j = \sum_{i=q-r-s}^q e_{ij} \mathfrak{T}_i \quad (j = r+s+1),$$

où les $r+s+1$ coefficients $e_{i, r+s+1}$ ($i = q-r-s, q-r-s+1, \dots, q$) remplissent les $r+s$ conditions que l'on obtient en éliminant les $r+s$ coefficients $e_{i, r+s+1}$ ($i = q+1, q+2, \dots, q+r+s$) entre les $2(r+s)$ équations (63) où $j = r+s+1$. Ainsi nous avons trouvé

$$(71) \quad e_{ij} = \tau_j e_{i, s-1} + \sum_{h=0}^{r+1} \sigma_{hj} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} e_{i+k, s}^{(h-k)} \quad \begin{pmatrix} i = q-j+1, q-j+2, \dots, q \\ j = s+r+1 \end{pmatrix}.$$

En partant de la définition des coefficients e_{is} , $e_{i, s-1}$ et en tenant compte des relations (71), nous trouvons

$$\sum_{i=q-j}^{q-h} (-1)^i e_{i+1, j} [Q_{ih}]_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \dots, s-2 \\ j = r+s+1 \end{pmatrix}.$$

Mais en partant directement de la définition des coefficients $e_{i, r+s+1}$, nous aurons encore [comparer les équations (56''')] les conditions

$$(72) \quad \sum_{i=q-j}^{q-h} (-1)^i e_{i+1, j} [Q_{ih}]_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} j = r+s+1 \\ h = s-1, s \end{pmatrix},$$

$$(72') \quad \sum_{i=q-j}^{q-j+h+1} (-1)^i \left[e_{i+1, j} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} [Q_{i+k-h, s}]_1^{(k)} \right] = 0 \quad \begin{pmatrix} j = r+s+1 \\ h = 1, 2, \dots, r \end{pmatrix}.$$

De l'équation (72) où $h = s-1$, nous pouvons déduire

$$\frac{H_{q-j+1, s} H_{q-s+2, s-2}}{(H_{q-s+1, s-1})^2} = (-1)^r \frac{Q_{q-j+1, s} [Q_{q-s+2, s-2}]_1}{([Q_{q-s+1, s-1}]_1)^2} \quad (j = r+s+1)$$

et par suite $H_{q-r-s, s} = (-1)^r [Q_{q-r-s, s}]_1$; il en résulte

$$H_{q-j, j} = [K_{q-j, j}]_1 \quad (j = r+s).$$

De l'équation (72) où $h = s$ nous pouvons déduire

$$\frac{[Q_{q-s, s-1}]_1 + H_{q-s, s-1} + H'_{q-s+1, s-1}}{H_{q-s+1, s-1}} = \frac{[Q_{q-j-1, j}]_1 + H_{q-j-1, j} + H'_{q-j, j}}{H_{q-j, j}} \quad (j = r+s)$$

Il en suit

$$\frac{[Q_{q-j-1, j}]_1 + H_{q-j-1, j} + H'_{q-j, j}}{H_{q-j, j}} = -[A_{q-1}]_1 \quad (j = r+s).$$

Les équations (72) nous donnent ainsi les deux relations

$$\frac{H_{q-j-1, j} + H'_{q-j, j} + [Q_{q-j-1, j}]_1}{H_{q-j, j}} = -[A_{q-1, 1}]_1 \quad (j = r+s).$$

En comparant les deux définitions de l'expression $\Phi_{r+s+1}(z_q)$, nous avons ainsi obtenu ces deux relations et les r équations (72'). A l'aide des équations (72') et en tenant compte des relations obtenues entre les invariants des équations (E) et (E₁), nous pouvons obtenir $[K_{q-s+1-i, s-1}]_1$ ($i = 2, 3, \dots, r+1$) en fonction de $[A_{q-1}]_1$, $[Q_{q-j-i, j}]_1$ ($j = r+s$, $i = 2, 3, \dots, r+1$) et des invariants de l'équation (E). Mais je n'ai pas réussi à obtenir ces relations sous une forme simple. — Nous sommes partis de la supposition $s > 1$. Dans le cas où $s = 1$, il faut un peu modifier la preuve. — En comparant enfin les deux définitions différentes des expressions $\Phi_{j+1}(z_q)$ ($j = r+s+1, r+s+2, \dots, q$), nous obtiendrons comme auparavant les $2(q-r-s)$ relations

$$\begin{aligned} [K_{q-j, j}]_1 &= H_{q-j, j} \quad (j = r+s+1, r+s+2, \dots, q), \\ \frac{H_{q-j-1, j} + H'_{q-j, j} + [Q_{q-j-1, j}]_1}{H_{q-j, j}} &= -[A_{q-1}]_1 \quad (j = r+s+1, r+s+2, \dots, q). \end{aligned}$$

Comme $A_{q-1} = 0$, $[B_q]_1 = B_q$, les dernières relations peuvent être remplacées par

$$\begin{aligned} \frac{H_{q-j-1, j} + H'_{q-j, j} + [K_{q-j-1, j}]_1}{H_{q-j, j}} &= \frac{j}{q} \frac{H'_{0q}}{H_{0q}} \quad (j = r+s+1, r+s+2, \dots, q-1), \\ [H_{q-1}]_1 &= 2H_{q-1} - K_{q-1} - \frac{\partial^2 \log H_{0q}}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi obtenu les $2q-r$ relations distinctes

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} [K_{q-j, j}]_1 &= H_{q-j, j} \quad (j = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, q), \\ [K_{q-s-i, s}]_1 &= (-1)^i H_{q-s-i, s} \quad (i = 1, 2, \dots, r), \\ [K_{q-j-1, j}]_1 + H_{q-j-1, j} + H'_{q-j, j} &= \frac{j}{q} H_{q-j, j} \frac{H'_{0q}}{H_{0q}} \\ &\quad (j = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q-1), \\ [H_{q-1}]_1 &= 2H_{q-1} - K_{q-1} - \frac{\partial^2 \log H_{0q}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right.$$

A l'aide de ces relations, les invariants

$$\begin{aligned} [H_{q-1}]_1, [K_{q-j, j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, q), [K_{q-s-i, s}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \\ [K_{q-j-1, j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q-1) \end{aligned}$$

se déduisent des invariants

$$\begin{aligned} K_{q-1}, H_{q-j, j} \quad (j = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, q), [H_{q-s-i, s}], \quad (i = 1, 2, \dots, r), \\ H_{q-j-1, j} \quad (j = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q-1), \end{aligned}$$

et inversement. A l'aide des équations (72'), nous pouvons maintenant déterminer les invariants

$$[K_{q-s+1-i, s-1}]_1 \quad (i = 2, 3, \dots, r+1)$$

en fonction des invariants de l'équation (E) . Mais, comme je l'ai déjà dit, je n'ai pas réussi à obtenir ces relations sous une forme simple. — Il est aisé de vérifier que tous les invariants de l'équation (E_1) s'expriment au moyen des $2q$ invariants

$$\begin{aligned} [H_{q-1}]_1, \quad [K_{q-j,j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, q), \quad [K_{q-s-i,s}]_1, \quad (i = 1, 2, \dots, r), \\ [K_{q-j-1,j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q-1), \\ [K_{q-s+1-i,s-1}]_1 \quad (i = 2, 3, \dots, r+1). \end{aligned}$$

Ainsi les relations qui lient les invariants de l'équation (E) avec ceux de l'équation (E_1) sont données par les $2q-r$ relations (73) et par les r relations qui peuvent se déduire des équations (72').

Proposition 13. Supposons que l'équation (E_1) soit d'ordre $q+1$. Dans le cas où

$$H_{q-i,i} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

les relations qu'il y a entre les invariants des équations (E) et (E_1) sont données par les $2q$ équations

$$\begin{cases} [K_{q-i,i}]_1 = H_{q-i,i} & (i = 1, 2, \dots, q), \\ H_{q-i-1,i} + \frac{\partial H_{q-i,i}}{\partial y} + [K_{q-i-1,i}]_1 = \frac{i}{q} H_{q-i,i} \frac{\partial \log H_{0q}}{\partial y} & (i = 1, 2, \dots, q-1), \\ [H_{q-1}]_1 = 2H_{q-1} - K_{q-1} - \frac{\partial^2 \log H_{0q}}{\partial x \partial y}; \end{cases}$$

à l'aide de ces $2q$ relations, nous obtenons les invariants

$$[H_{q-1}]_1, \quad [K_{q-i,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad [K_{q-i-1,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q-1)$$

en fonction des invariants

$$K_{q-1}, \quad H_{q-i,i} \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad H_{q-i-1,i} \quad (i = 1, 2, \dots, q-1),$$

et de même inversement; tout invariant de l'équation (E_1) est une fonction des $2q$ invariants obtenus. Dans le cas où

$$H_{q-i,i} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q), \quad H_{q-i,i} = 0 \quad (i = s, s+1, \dots, s+r-1),$$

les $2q$ relations mentionnées se réduisent aux $2q-r$ relations distinctes; les relations qu'il y a entre les invariants des équations (E) et (E_1) sont données par les $2q-r$ relations

$$\begin{cases} [K_{q-i,i}]_1 = H_{q-i,i} & (i = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, q), \\ [K_{q-s-i,s}]_1 = (-1)^i H_{q-s-i,s} & (i = 1, 2, \dots, r), \\ H_{q-i-1,i} + \frac{\partial H_{q-i,i}}{\partial y} + [K_{q-i-1,i}]_1 = \frac{i}{q} H_{q-i,i} \frac{\partial \log H_{0q}}{\partial y} & (i = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q-1), \\ [H_{q-1}]_1 = 2H_{q-1} - K_{q-1} - \frac{\partial^2 \log H_{0q}}{\partial x \partial y}, \end{cases}$$

et par les r relations qui peuvent être déduites des équations (72'); à l'aide de ces $2q$ relations distinctes, on obtient les invariants

$$\begin{aligned} [H_{q-1}]_1, \quad [K_{q-i,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, q), \quad [K_{q-s-i,s}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \\ [K_{q-i-1,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q-1), \\ [K_{q-s+1-i,s-1}]_1 \quad (i = 2, 3, \dots, r+1) \end{aligned}$$

en fonction des invariants

$$\begin{aligned} K_{q-1}, \quad H_{q-i, i} \quad (i = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, q), \quad H_{q-s-i, s} \quad (i = 1, 2, \dots, r), \\ H_{q-i-1, i} \quad (i = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q-1), \\ H_{q-s+1-i, s-1} \quad (i = 2, 3, \dots, r+1), \end{aligned}$$

et de même inversement; tout invariant de l'équation (E_1) est une fonction des invariants obtenus. — Supposons que l'équation (E_1) soit d'ordre $p+1$ ($p < q$). Supposons

$$H_{q-i, i} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Les relations qu'il y a entre les invariants des équations (E) et (E_1) sont données par les $2p$ équations

$$\begin{cases} [K_{p-i, i}]_1 = H_{q-i, i} \quad (i = 1, 2, \dots, p), \\ H_{q-i-1, i} + \frac{\partial H_{q-i, i}}{\partial y} + [K_{p-i-1, i}]_1 = \frac{i}{p} H_{q-i, i} \left(\frac{H_{q-p-1, p}}{H_{q-p, p}} + \frac{\partial \log H_{q-p, p}}{\partial y} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, p-1), \\ [H_{p-1}]_1 - [K_{p-1}]_1 = \frac{p}{q} (H_{q-1} - K_{q-1}) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H_{q-p-1, p}}{H_{q-p, p}} + \frac{\partial \log H_{q-p, p}}{\partial y} \right); \end{cases}$$

à l'aide de ces $2p$ relations, nous obtenons les invariants

$$[H_{p-1}]_1, \quad [K_{p-i, i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, p), \quad [K_{p-i-1, i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, p-1)$$

en fonction des invariants de l'équation (E) . Tout invariant de l'équation (E_1) est une fonction des invariants obtenus.

Entre les invariants des équations (E_i) et (E_{i+1}) , où $i \geq 0$, il existe les relations analogues. Si les équations (E_i) et (E_{i+1}) sont de même ordre, nous pouvons, à l'aide de ces relations et en partant des invariants de l'équation (E_i) , calculer les invariants de l'équation (E_{i+1}) ; de même, en partant des invariants de l'équation (E_{i+1}) , nous pouvons calculer les invariants de l'équation (E_i) . Il est clair que le calcul des invariants des équations (E_1) , (E_2) , (E_3) , ... et (E_{-1}) , (E_{-2}) , (E_{-3}) , ... sera de règle très compliquée. Pour le cas où $H_{q-j, j} \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, q$), les relations qu'il y a entre les invariants des équations (E) et (E_1) sont obtenues, il est vrai, à l'aide des équations très simples, par lesquelles les $2q$ invariants

$$[H_{q-1}]_1, \quad [K_{q-j, j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad [K_{q-j-1, j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, q-1),$$

s'expriment au moyen des invariants

$$K_{q-1}, \quad H_{q-j, j} \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad H_{q-j-1, j} \quad (j = 1, 2, \dots, q-1),$$

mais je n'ai pas réussi à exprimer les invariants

$$[K_{q-1}]_1, \quad [H_{q-j, j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad [H_{q-j-1, j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, q-1)$$

en fonction des invariants

$$[H_{q-1}]_1, \quad [K_{q-j, j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad [K_{q-j-1, j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, q-1)$$

par des relations simples. Comme je l'ai dit déjà (page 74), ce sont les $2q$ invariants

$$H_{q-j, j}, \quad K_{q-j, j} \quad (j = 1, 2, \dots, q)$$

de l'équation (E) qui correspondent le plus près aux invariants h et k de l'équation (1); ce sont seulement ces $2q$ invariants qui sont de quelque importance pour reconnaître si l'équation admet une intégrale de la forme d'Euler de rang 1. Parmi ces $2q$ invariants de l'équation (E_1) , les q derniers invariants s'obtiennent directement des invariants de l'équation (E) , puisque

$$[K_{q-j,j}]_1 = H_{q-j,j} \quad (j = 1, 2, \dots, q),$$

mais les invariants $[H_{q-j,j}]_1$ ($j = 1, 2, \dots, q$) ne s'obtiennent nullement aussi simplement des invariants de l'équation (E) . La désignation d'invariants est cependant d'importance pour l'application pratique de la méthode de Laplace; en introduisant les invariants, l'on élimine le facteur arbitraire, et les fonctions essentielles des coefficients de l'équation restent. Puis l'on peut, dans des cas particuliers, obtenir les expressions générales des invariants de l'équation (E_i) ($i \geq 0$), ce qui nous permet de reconnaître si l'intégration de l'équation (E) peut être réduite à l'intégration d'équations différentielles linéaires, ou à quel point l'intégration de l'équation peut être simplifiée par la méthode de Laplace. Parfois la réduction à forme normale peut remplacer l'emploi de la désignation d'invariants.

Avant de quitter le chapitre des invariants, je vais traiter un exemple simple. J'ai choisi parmi les équations (20) celles dont tous les invariants sont des constantes, et je vais étudier à quel point l'intégration de ces équations peut être simplifiée par la méthode de Laplace.

Soit donnée une équation (20) dont tous les invariants sont des constantes; à l'aide de la substitution $z = \lambda \bar{z}$, l'équation peut se mettre sous la forme

$$\sum_{i=0}^q \left(a_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + (b_i + ca_i y) \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \bar{z} = 0 \quad (a_{q-1} = b_q = 0; a_q = 1),$$

où les coefficients a_i , b_i , c sont des constantes. L'équation

$$(74) \quad \sum_{i=0}^q \left(a_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + (b_i + ca_i y) \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0 \quad (a_q = 1; b_q = a_{q-1} = 0; c \neq 0),$$

a_i , b_i , c étant des constantes, admet les invariants suivants:

$$I_{q-1} = -qc, \quad I_i = a_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-2),$$

$$H_i = -b_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1), \quad K = 1 + \frac{1}{c} \left(b_0 + \frac{1}{c} ca_1 + \dots + \frac{1}{c} ca_{q-1} \right) \quad (j = 0, 1, \dots, q-1).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (74) admette s X -intégrales distinctes de rang 1 est que les deux équations

$$\sum_{i=0}^q a_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{q-1} b_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0$$

admettent s intégrales distinctes en commun, et la condition nécessaire et suffisante pour cela est $H_{q-j,j} = 0$ ($j = q-s+1, q-s+2, \dots, q$). Nous avons

$$H_{q-2, 2} = \begin{vmatrix} b_{q-1} & b_{q-2} & b_{q-3} \\ 0 & b_{q-1} & b_{q-2} \\ 1 & 0 & a_{q-2} \end{vmatrix}, \quad H_{q-3, 3} = - \begin{vmatrix} b_{q-1} & b_{q-2} & b_{q-3} & b_{q-4} & b_{q-5} \\ 0 & b_{q-1} & b_{q-2} & b_{q-3} & b_{q-4} \\ 0 & 0 & b_{q-1} & b_{q-2} & b_{q-3} \\ 1 & 0 & a_{q-2} & a_{q-3} & a_{q-4} \\ 0 & 1 & 0 & a_{q-2} & a_{q-3} \end{vmatrix},$$

etc. Lorsque l'équation (74) admet s X -intégrales distinctes de rang 1, l'ordre de l'équation peut être immédiatement diminué de s unités. Supposons $H_{0q} \neq 0$. L'ordre de l'équation (74) ne peut être diminué directement. L'équation (E_1) est obtenue très simplement. Nous avons ¹⁾

$$Z_1 = \sum_{i=0}^q a_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}, \quad \frac{\partial Z_1}{\partial x} + cy Z_1 = - \sum_{i=0}^{q-1} b_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}.$$

L'équation qui définit Z_1 peut par suite s'écrire

$$\sum_{i=0}^q a_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} + cy Z_1 \right) + \sum_{i=0}^{q-1} b_i \frac{\partial^i Z_1}{\partial y^i} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(74') \quad \sum_{i=0}^q \left[a_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + (b_i + (i+1)ca_{i+1} + ca_i y) \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right] Z_1 = 0.$$

Cette équation est du même type et du même ordre que l'équation proposée (74), et les invariants en sont

$$[I_{q-1}]_1 = -qc, \quad [I_i]_1 = a_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-2);$$

$$[H_i]_1 = -(b_i + (i+1)ca_{i+1}) \quad (i = 0, 1, \dots, q-1), \quad [K_i]_1 = (-1)^{q-i} b_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1);$$

il en résulte $[K_{ij}]_1 = (-1)^{q-i-j} H_{ij} \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right)$. Ces relations entre les invariants des équations (E_1) et (E) peuvent aussi être déduites des relations données dans la proposition 13. Des valeurs obtenues pour les invariants de l'équation (E_1) , il suit immédiatement que les invariants de l'équation (E_m) sont

$$\begin{cases} [I_i]_m = I_i, & [H_i]_m = H_i - m(i+1)ca_{i+1} = -(b_i + m(i+1)ca_{i+1}), \\ [K_i]_m = K_i + (-1)^{q-i} m(i+1)ca_{i+1} = (-1)^{q-i} (b_i + (m-1)(i+1)ca_{i+1}) \end{cases} \quad (i = 0, 1, \dots, q-1),$$

pourvu que l'équation (E_m) soit d'ordre n . La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (E_m) , $m > 0$, d'ordre n admette une X -intégrale de rang 1 est

¹⁾ En appliquant la transformation (T_1)

$$z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i},$$

j'écris parfois $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ pour $z_q, z_{2q}, z_{3q}, \dots$; cette désignation a l'avantage d'être indépendante de l'ordre de l'équation.

$[H_{0q}]_m = 0$, et la condition nécessaire et suffisante pour que l'adjointe de l'équation (E_m) , $m < 0$, d'ordre n admette une X -intégrale de rang 1 est $[K_{0q}]_m = 0$ ou, autrement dit, $[H_{0q}]_{m-1} = 0$. L'invariant H_{0q} est

$$H_{0q} = (-1)^q \begin{vmatrix} b_{q-1} & b_{q-2} & b_{q-3} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{q-1} & b_{q-2} & \dots & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{q-1} & b_{q-2} & \dots & b_0 \\ 1 & 0 & a_{q-2} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{q-2} & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

Si l'on remplace b_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$) par $b_i + (i+1)ca_{i+1}$ dans ce déterminant, l'on obtiendra la valeur de l'invariant $[H_{0q}]_1$. Nous pouvons écrire

$$[H_{0q}]_1 = \sum_{i=0}^q d_i c^i,$$

où les coefficients d_i ($i = 0, 1, \dots, q$), fonctions des coefficients a_j, b_j ($j = 0, 1, \dots, q-1$), peuvent être calculés assez facilement. Après avoir calculé les coefficients d_i ($i = 0, 1, \dots, q$), l'on obtient directement la valeur de l'invariant $[H_{0q}]_m$; nous avons

$$[H_{0q}]_m = \sum_{i=0}^q d_i (mc)^i.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (E) admette une X -intégrale est ainsi que l'équation algébrique

$$(75) \quad \sum_{i=0}^q d_i (mc)^i = 0,$$

m étant la quantité inconnue, ait une racine qui est un nombre entier positif; si m_1 est le plus petit nombre entier positif qui soit racine de l'équation (75), l'équation (E) admet une X -intégrale de rang $m_1 + 1$ et pas de X -intégrale de rang inférieur. Et la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation adjointe (E') admette une X -intégrale est que l'équation (75) ait une racine qui est un nombre entier négatif; si m_1 est le nombre entier négatif à la valeur absolue la plus petite qui soit racine de l'équation (75), l'équation (E') admet une X -intégrale de rang $-m_1$ et l'équation (E') n'admet pas de X -intégrale de rang inférieur. — Si l'équation (E_m) est d'ordre inférieur à n , les expressions ci-dessus obtenues pour les invariants de l'équation (E_m) ne sont pas valables. Supposons que l'équation (E_{m_1}) , $m_1 > 0$, soit d'ordre n et que l'équation (E_{m_1+1}) soit d'ordre inférieur; m_1 est alors le plus petit nombre entier positif qui soit racine de l'équation (75). Supposons que l'équation (E_{m_1+1}) soit d'ordre $n-1$. Les équations

$$(76) \quad \sum_{i=0}^q a_i \frac{\partial^i Z_{m_1}}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{q-1} (b_i + m_1(i+1)ca_{i+1}) \frac{\partial^i Z_{m_1}}{\partial y^i} = 0$$

admettent alors une — et une seule — intégrale commune. Nous pouvons par suite écrire

$$\sum_{i=0}^q a_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} = \sum_{i=0}^{q-1} \bar{a}_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \right),$$

$$\sum_{i=0}^{q-1} (b_i + m_1(i+1)ca_{i+1}) \frac{\partial^i}{\partial y^i} = \sum_{i=0}^{q-2} \bar{b}_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \right),$$

λ_1 étant une constante. L'équation (E_{m_1}) admet la X -intégrale $e^{\lambda_1 y} X$, et l'équation (E) admet une X -intégrale de rang $m_1 + 1$ qui correspond à $e^{\lambda_1 y}$. L'équation (E_{m_1+1}) peut s'écrire

$$\sum_{i=0}^{q-1} \bar{a}_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left(\frac{\partial}{\partial x} + cy \right) Z_{m_1+1} + \sum_{i=0}^{q-2} \bar{b}_i \frac{\partial^i Z_{m_1+1}}{\partial y^i} = 0.$$

Il résulte de ce qui précède que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (E_{m_1+1}) admette une X -intégrale est qu'il existe un nombre entier positif r_1 , pour lequel les équations

$$(76') \quad \sum_{i=0}^{q-1} \bar{a}_i \frac{\partial^i Z_{m_1+r_1}}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{q-2} (\bar{b}_i + r_1(i+1)c\bar{a}_{i+1}) \frac{\partial^i Z_{m_1+r_1}}{\partial y^i} = 0$$

admettent une intégrale commune; pour l'équation (74) est supposée $a_{q-1} = 0$, mais il n'en suit pas $\bar{a}_{q-1} = 0$; il est aisé de voir que cette différence ne change pas le résultat en question. Je désigne $\frac{\partial}{\partial y}$ par $\mathfrak{D}$ et j'écris les équations (76) sous la forme

$$(77) \quad \prod_{i=1}^q (\mathfrak{D} - \lambda_i) Z_{m_1} = 0, \quad \prod_{i=1}^{q-1} (\mathfrak{D} - \mu_i) Z_{m_1} = 0, \quad \text{où } \lambda_1 = \mu_1,$$

et les équations (76') sous la forme

$$(77') \quad \left\{ \begin{array}{l} \prod_{i=2}^q (\mathfrak{D} - \lambda_i) Z_{m_1+r_1} = 0, \\ \prod_{i=2}^{q-1} (\mathfrak{D} - \mu_i) Z_{m_1+r_1} + \frac{r_1 c}{b_{q-1} + m_1 c q} \left[\frac{\partial}{\partial \mathfrak{D}} \prod_{i=2}^q (\mathfrak{D} - \lambda_i) \right] Z_{m_1+r_1} = 0. \end{array} \right.$$

(Le changement insignifiant de la manière d'écrire les équations, si $b_{q-1} + m_1 c q = 0$, se comprend de soi-même). En multipliant les équations (77') par le facteur $\mathfrak{D} - \lambda_1$, nous obtiendrons les équations

$$\prod_{i=1}^q (\mathfrak{D} - \lambda_i) Z_{m_1+r_1} = 0,$$

$$\prod_{i=1}^q (\mathfrak{D} - \mu_i) Z_{m_1+r_1} + \frac{r_1 c}{b_{q-1} + m_1 c q} \left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{D}} \prod_{i=1}^q (\mathfrak{D} - \lambda_i) - \prod_{i=2}^q (\mathfrak{D} - \lambda_i) \right) Z_{m_1+r_1} = 0.$$

Une condition nécessaire pour que les équations (77') admettent une intégrale commune est par suite que les équations

$$\prod_{i=1}^q (\mathfrak{D} - \lambda_i) Z_{m_1+r_1} = 0,$$

$$\prod_{i=1}^q (\mathfrak{D} - \mu_i) Z_{m_1+r_1} + \frac{r_1 c}{b_{q-1} + m_1 c q} \left[\frac{\partial}{\partial \mathfrak{D}} \prod_{i=1}^q (\mathfrak{D} - \lambda_i) \right] Z_{m_1+r_1} = 0,$$

ou autrement dit les équations

$$(78) \quad \sum_{i=0}^q a_i \frac{\partial^i Z_{m_1+r_1}}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{q-1} (b_i + (m_1 + r_1)(i+1)ca_{i+1}) \frac{\partial^i Z_{m_1+r_1}}{\partial y^i} = 0,$$

admettent une intégrale commune. Réciproquement, si les équations (78) admettent une intégrale commune qui n'est pas $e^{\lambda_1 y}$, les équations (76') admettent aussi cette intégrale commune. Mais $e^{\lambda_1 y}$ ne peut être l'intégrale commune des équations (78)

qu'à condition que λ_1 soit une racine multiple de l'équation $\sum_{i=0}^q a_i \lambda^i = 0$ et en même temps racine de l'équation $\sum_{i=0}^{q-1} b_i \lambda^i = 0$; comme nous avons supposé $H_{0q} \neq 0$,

nous pouvons excepter ce cas. La condition nécessaire et suffisante pour que les équations (76') admettent une intégrale commune est ainsi que les équations (78) admettent une intégrale commune, et la condition nécessaire et suffisante en est

$$\sum_{i=0}^q d_i ((m_1 + r_1)c)^i = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (E_{m_1+1}) admette une X -intégrale est ainsi que l'équation

$$\sum_{i=0}^q d_i ((m_1 + r)c)^i = 0,$$

r étant la quantité inconnue, ait une racine qui est un nombre entier positif. Supposons que r_1 soit le plus petit nombre entier positif qui soit racine de cette équation. L'équation $(E_{m_1+r_1})$ admet une X -intégrale de rang 1, et l'équation (E_{m_1+1}) admet une X -intégrale de rang r_1 et pas de X -intégrale de rang inférieur. Supposons encore que l'intégrale commune des équations (78) et (76') soit $e^{\lambda_2 y}$; l'équation $(E_{m_1+r_1})$ admet l'intégrale $e^{\lambda_2 y} X$ et l'équation (E) admet par suite une X -intégrale de rang $m_1 + r_1 + 1$ qui correspond à $e^{\lambda_2 y}$. Écrivons $m_1 + r_1 = m_2$. Nous avons ainsi montré que, si, après m_1 , m_2 est le plus petit nombre entier positif qui soit racine de l'équation (75), l'équation (E) admet une X -intégrale de rang $m_2 + 1$. De même nous trouvons que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (E_{m_2+1}) d'ordre $n-2$ admette une X -intégrale est qu'il existe un nombre entier positif r_2 , pour lequel les équations

$$(78') \quad \sum_{i=0}^{q-1} \bar{a}_i \frac{\partial^i Z_{m_2+r_2}}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{q-2} [\bar{b}_i + (r_1 + r_2)(i+1)c\bar{a}_{i+1}] \frac{\partial^i Z_{m_2+r_2}}{\partial y^i} = 0$$

admettent une intégrale commune, car $e^{\lambda_2 y}$ n'est une intégrale commune des dernières équations qu'à condition que λ_2 est une racine multiple de l'équation $\sum_{i=0}^q a_i \lambda^i = 0$ et en même temps une racine de l'équation $\sum_{i=0}^{q-1} b_i \lambda^i = 0$; et la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (78') admettent une intégrale commune est

$$\sum_{i=0}^q d_i [(m_2 + r_2) c]^i = 0.$$

— Nous avons supposé jusqu'ici que l'équation (E_{m_1+1}) soit d'ordre $n - 1$; si nous supposons que l'équation (E_{m_1+1}) soit d'ordre $n - s$, il en suit que m_1 est une racine d'ordre s de l'équation (75). — En continuant de cette manière nous obtiendrons: La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (74) admette s X -intégrales distinctes est que l'équation (75), m étant la quantité inconnue, ait s racines qui sont des nombres entiers positifs; si l'équation (75) a les racines $m_1, m_2, \dots, m_s$ qui sont des nombres entiers positifs, l'équation (74) admet s X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$, et ces X -intégrales ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur; et si les équations

$$\sum_{i=0}^q a_i \frac{\partial^i x}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{q-1} (b_i + m_h (i + 1) c a_{i+1}) \frac{\partial^i x}{\partial y^i} = 0$$

admettent l'intégrale $e^{\lambda_h y}$ en commun, l'équation (74) admet une X -intégrale de rang $m_h + 1$ qui correspond à $e^{\lambda_h y}$. Et la condition nécessaire et suffisante pour que l'adjointe de l'équation (74) admette s X -intégrales distinctes est que l'équation (75) ait s racines qui sont des nombres entiers négatifs; si l'équation (75) a les racines $m_1, m_2, \dots, m_s$ qui sont des nombres entiers négatifs, l'adjointe de l'équation (74) admet s X -intégrales de rang $-m_1, -m_2, \dots, -m_s$, et ces X -intégrales ne peuvent être remplacées par des intégrales de rang inférieur. Il en suit que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (74) admette une Y -intégrale de rang $r + 1$ est que toutes les racines de l'équation (75) soient des nombres entiers négatifs et que la somme des valeurs absolues des racines soit $r + q$.

Pour reconnaître si l'équation (74) ou l'adjointe de l'équation (74) admettent des intégrales de la forme d'Euler, et dans ce cas combien, il suffit donc de calculer les $q + 1$ coefficients d_i ($i = 0, 1, \dots, q$) et d'examiner combien des racines de l'équation (75)

$$\sum_{i=0}^q d_i (mc)^i = 0$$

(m étant la quantité inconnue) sont des nombres entiers, positifs ou négatifs. Jusqu'ici nous avons supposé $H_{0q} \neq 0$. Lorsque $H_{0q} = 0$, nous pouvons ou diminuer d'abord l'ordre de l'équation (74) ou former l'équation (75) directement; il est pourtant à remarquer que si l'équation $\sum_{i=0}^q a_i \lambda^i = 0$ a une racine multiple qui est en

même temps une racine de l'équation $\sum_{i=0}^{q-1} b_i \lambda^i = 0$, il nous faut diminuer l'ordre de l'équation (74) d'abord, sinon, nous aurions $d_i = 0$ ($i = 0, 1, \dots, q$). Il suit de ce qui précède que, si λ_1 est une racine multiple de l'équation $\sum_{i=0}^q a_i \lambda^i = 0$ et que l'équation (74) admette une X -intégrale qui correspond à $e^{\lambda_1 y}$, celle-ci doit être de rang 1.

Nous pouvons déduire de la proposition 12: La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégration de l'équation (74) [et par suite aussi celle de l'équation adjointe] puisse être ramenée à l'intégration d'équations différentielles linéaires est que toutes les racines de l'équation (75) soient des nombres entiers, négatifs ou positifs (zéro inclusivement). Une condition nécessaire (pas suffisante) en est que $\frac{H_{q-1}}{c}$ soit un nombre entier. Cela peut être démontré de la manière suivante: Supposons que l'équation (74) admette s X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ ($m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_s$) qui ne puissent être remplacées par des intégrales de rang inférieur, et que l'équation adjointe admette $q - s$ X -intégrales de rang $r_1 + 1, r_2 + 1, \dots, r_{q-s} + 1$ ($r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{q-s}$) qui ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur. Nous avons obtenue (page 93)

$$[H_{q-1}]_1 = H_{q-1} - qc,$$

pourvu que l'équation (E_1) soit d'ordre $q + 1$. Si l'équation (E_1) est d'ordre $p + 1$, il suit de la proposition 13 que nous aurons

$$[H_{p-1}]_1 = H_{p-1} - pc.$$

Nous pourrions par suite écrire

$$[H_{p_2-1}]_{i+1} = [H_{p_1-1}]_i - p_2 c, \quad [K_{p_2-1}]_{i+1} = [H_{p_1-1}]_i,$$

lorsque l'équation (E_i) est d'ordre $p_1 + 1$ et l'équation (E_{i+1}) d'ordre $p_2 + 1$, $i \geq 0$. En appliquant ces formules, nous obtiendrons

$$[K_{q-s-1}]_{m_s+1} = H_{q-1} - c \left(\sum_{i=1}^s m_i + (q-s)m_s \right).$$

A l'aide de la preuve de la proposition 12 nous verrons que l'adjointe de l'équation (E_{m_s+1}) admet $q - s$ X -intégrales; les $q - s$ X -intégrales sont de rang $r_1 + m_s + 2, r_2 + m_s + 2, \dots, r_{q-s} + m_s + 2$. L'invariant H_{q-s-1} pour l'équation qui est adjointe à l'équation (E_{m_s+1}) est $[K_{q-s-1}]_{m_s+1}$; si l'on applique la transformation (T_1) $m_s + r_{q-s} + 1$ fois de suite à cette équation adjointe, on est conduit, si $r_{q-s-1} < r_{q-s}$, à une équation du second ordre, dont l'invariant H_0 (l'invariant h d'après la désignation de Darboux) est

$$[K_{q-s-1}]_{m_s+1} + c \sum_{i=1}^{q-s} (r_i + m_s + 1).$$

Comme l'équation obtenue admet une X -intégrale de rang 1, l'invariant H_0 de cette équation doit être nul, c'est-à-dire

$$[K_{q-s-1}]_{m_s+1} + c \sum_{i=1}^{q-s} (r_i + m_s + 1) = 0,$$

d'où suit

$$H_{q-1} - c \left(\sum_{i=1}^s m_i + (q-s)m_s - \sum_{i=1}^{q-s} (r_i + m_s + 1) \right) = 0,$$

et ainsi

$$H_{q-1} = c \sum_{i=1}^s m_i - c \sum_{i=1}^{q-s} (r_i + 1).$$

Si $r_{q-s-1} = r_{q-s}$, la seule différence dans la preuve sera qu'il faudra employer une autre désignation pour l'invariant H_0 , puisque l'équation obtenue est d'ordre supérieur au second. Par cela il est prouvé qu'une condition nécessaire pour que l'intégration de l'équation (74) puisse être ramenée à l'intégration d'équations différentielles linéaires est que l'on ait

$$H_{q-1} = c \left(\sum_{i=1}^s m_i - \sum_{i=1}^{q-s} (r_i + 1) \right),$$

où autrement dit que la somme des racines de l'équation (75) soit $\frac{H_{q-1}}{c}$, c'est-à-dire

$$-\frac{d_{q-1}}{d_q} = \frac{H_{q-1}}{c} = \text{un nombre entier.}$$

Nous voyons que l'intégrale générale de l'équation (74) ne peut jamais être représentée par une somme d'intégrales de la forme d'Euler.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale générale de l'équation

$$\sum_{i=0}^q \left(a_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + (b_i + c a_i y) \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0, \quad (a_q = 1; \quad b_q = 0)$$

soit représentée par n intégrales de la forme d'Euler est que l'équation en question soit de la forme

$$\sum_{i=0}^q a_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} = 0.$$

L'équation

$$\sum_{i=0}^q \left(a_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + b_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0,$$

ne change pas pour les transformations (T_1) et (T_{-1}) ; il en suit que, si l'équation en question admet une intégrale de la forme d'Euler, celle-ci est de rang 1.

Je donnerai enfin quelques relations entre les invariants de l'équation (74) qui pourraient être d'intérêt. Il résulte des expressions obtenues pour les invariants de l'équation (E_1) (page 93) que, si l'équation (E_m) est d'ordre n , nous pourrions écrire

$$[H_{ij}]_r = \sum_{s=0}^j h_{sij}(r)^s \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \\ r = 0, 1, \dots, m \end{pmatrix},$$

h_{sij} étant des fonctions de c , a_k , b_k ($k = 0, 1, \dots, q-1$). Si l'équation

(E_{j+1}) est d'ordre n , entre les $j+2$ équations $[H_{ij}]_r = \sum_{s=0}^j h_{sij}(r)^s$ ($r=0, 1, \dots, j+1$), les $j+1$ quantités h_{sij} ($s=0, 1, \dots, j$) peuvent être éliminées, et nous obtiendrons de cette manière l'équation

$$[H_{ij}]_{j+1} - (j+1)[H_{ij}]_j + \frac{(j+1)j}{2!} [H_{ij}]_{j-1} - \dots + (-1)^{j+1-r} \frac{j+1!}{r!(j+1-r)!} [H_{ij}]_r + \dots + (-1)^j (j+1) [H_{ij}]_1 + (-1)^{j+1} H_{ij} = 0.$$

Il en résulte

$$\frac{j!(m-j-1)!}{m!} [H_{ij}]_m = \frac{[H_{ij}]_j}{m-j} - j \frac{[H_{ij}]_{j-1}}{m-j+1} + \dots + (-1)^{j-r} \frac{j!}{r!(j-r)!} \frac{[H_{ij}]_r}{m-r} + \dots + (-1)^{j-1} j \frac{[H_{ij}]_1}{m-1} + (-1)^j \frac{H_{ij}}{m} = 0, \quad \begin{pmatrix} m > j \\ j = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{pmatrix}$$

pourvu que l'équation (E_m) soit d'ordre n . Ce sont les $2q$ invariants $H_{q-j,j}$, $K_{q-j,j}$ ($j=1, 2, \dots, q$) qui sont du plus grand intérêt. Les équations obtenues nous permettent d'exprimer les $2q$ invariants en question de l'équation (E_m) — soit $m \geq q$, soit $m < 0$ — d'ordre n , c'est-à-dire les invariants $[H_{q-j,j}]_m$, $[K_{q-j,j}]_m$ ($j=1, 2, \dots, q$), en fonction des mêmes invariants des équations (E) , (E_1) , (E_2) , ... (E_{q-1}) d'ordre n . Je cite ces relations parce qu'il ne me semble pas impossible que des relations analogues aient lieu pour l'équation générale (20), c'est-à-dire que les $2q$ invariants $[H_{q-j,j}]_m$, $[K_{q-j,j}]_m$ ($j=1, 2, \dots, q$), $m \leq 0$, soient des fonctions des invariants

$$[H_{q-j,j}]_r = \begin{pmatrix} r=0, 1, \dots, j-1 \\ j=1, 2, \dots, q \end{pmatrix}, \quad K_{q-j,j} \quad (j=1, 2, \dots, q),$$

pourvu que les équations (E_{q-1}) et (E_m) soient d'ordre n . Ce sont les invariants $[H_{q-j,j}]_m$ ($j=1, 2, \dots, q$, $m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) qu'il est du plus grand intérêt d'obtenir; mais si on calcule ces invariants par les relations données dans la proposition 13, l'on est obligé en partant de l'équation générale (20) de calculer un grand nombre d'invariants sans intérêt pour les obtenir. Ce serait très intéressant, si après avoir calculé les invariants $[H_{q-j,j}]_r$ ($r=-1, 0, 1, \dots, j-1$), on pouvait directement obtenir

les invariants $[H_{q-j,j}]_m$ ($j=1, 2, \dots, q$, $m > j-1$) et $[H_{q-j,j}]_m$ ($j=1, 2, \dots, q$, $m < -1$); mais je ne me prononce pas sur la question de savoir si des relations du type mentionné existent en vérité pour l'équation générale (20).

Nous avons vu que, pour l'équation (74) il est facile de reconnaître à quel point l'intégration de l'équation peut être simplifiée par la méthode de Laplace. Mais cela n'est nullement le cas pour l'équation (20). Il est donc d'intérêt de chercher d'autres critères pour reconnaître si l'ordre de l'équation (20) peut être diminué par l'application des transformations de Laplace. Il est tout naturel de généraliser le critérium de Goursat. Pisati¹⁾ a déjà étendu le critérium de Goursat à l'équation

¹⁾ Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1905 pages 357—364.

$$(79) \quad \sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \equiv \varphi_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi_0 z = 0, \quad [A_q = 1; q+1 = n].$$

La preuve de Pisati est en peu de mots ce qui suit. Supposons que l'équation (79) admette $m+1$ intégrales ζ_s ($s=1, 2, \dots, m+1$), entre lesquelles il existe une relation de la forme

$$\zeta_{m+1} = \sum_{s=1}^m f_s(x) \zeta_s.$$

Comme

$$\left(\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \varphi_0 \right) \zeta_{m+1} = 0,$$

nous obtenons

$$\sum_{s=1}^m f_s(x) \left(\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \varphi_0 \right) \zeta_s + \sum_{s=1}^m f'_s(x) \varphi_1 \zeta_s = 0,$$

et ainsi

$$\sum_{s=1}^m f'_s(x) \varphi_1 \zeta_s = 0.$$

La transformation $z_q = \varphi_1 z$, appliquée à l'équation (79), conduira par suite à une équation qui admet les m intégrales

$$\zeta_{s1} \quad (s=1, 2, \dots, m), \quad \text{où} \quad \zeta_{s1} = \varphi_1 \zeta_s,$$

entre lesquelles existe la relation

$$\zeta_{m1} = -\frac{1}{f'_m(x)} \sum_{s=1}^{m-1} f'_s(x) \zeta_{s1}.$$

En appliquant la transformation en question $m-1$ fois (doit être $m-1$ fois au plus), nous obtiendrons une équation qui admet deux intégrales $\zeta_{1, m-1}$ et $\zeta_{2, m-1}$, entre lesquelles il existe une relation de la forme

$$\zeta_{2, m-1} = f(x) \zeta_{1, m-1};$$

l'équation obtenue admet l'intégrale $\zeta_{1, m-1} X$, et l'ordre de cette équation peut être diminué directement. En résumé, si l'équation (79) admet $m+1$ intégrales entre lesquelles existe une relation de la forme

$$\zeta_{m+1} = \sum_{s=1}^m f_s(x) \zeta_s,$$

l'équation peut, en appliquant la transformation

$$z_q = \varphi_1 z$$

$m-1$ fois (doit être $m-1$ fois au plus), être ramenée à une équation dont l'ordre peut être diminué directement. Cette proposition peut aussi être prouvée conformément à la preuve de Goursat¹⁾. Comme j'ai reçu de cette manière des résultats un peu plus complets, je vais exposer cette preuve.

¹⁾ Voir page 8.

Supposons que l'équation (20) admette $m+1$ intégrales ζ_s ($s=1, 2, \dots, m+1$) linéairement indépendantes — c'est-à-dire qu'il n'y a entre elles aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants — entre lesquelles existe la relation

$$(80) \quad \sum_{s=1}^{m+1} f_s(x) \zeta_s = 0.$$

S'il existait, entre les intégrales ζ_s ($s=1, 2, \dots, m+1$), $r+1$ relations distinctes de la forme (80), nous aurions pu entre ces $r+1$ relations éliminer r des intégrales ζ_s ($s=1, 2, \dots, m+1$) et par suite obtenir une relation du type considéré entre $m+1-r$ des intégrales. Nous pouvons donc supposer qu'il n'existe qu'une seule relation de la forme (80) entre les $m+1$ intégrales ζ_s ($s=1, 2, \dots, m+1$). Nous pouvons aussi supposer que les fonctions $f_s(x)$ ($s=1, 2, \dots, m+1$) dans cette relation soient linéairement indépendantes, car s'il existait une relation de la forme

$$f_1(x) = \sum_{s=2}^{m+1} a_s f_s(x),$$

les coefficients a_s étant des constants, nous pourrions écrire

$$\sum_{s=2}^{m+1} f_s(x) \bar{\zeta}_s = 0, \quad \text{où } \bar{\zeta}_s = \zeta_s + a_s \zeta_1.$$

Nous pouvons donc, sans diminuer la généralité, supposer qu'il n'existe qu'une seule relation de la forme (80) entre les $m+1$ intégrales ζ_s ($s=1, 2, \dots, m+1$) et que dans cette relation les fonctions $f_s(x)$ ($s=1, 2, \dots, m+1$) soient linéairement indépendantes.

Les $m+1$ intégrales ζ_s ($s=1, 2, \dots, m+1$) définissent une équation de la forme

$$(81) \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0,$$

λ_i étant des fonctions de x et de y . Les deux équations (20) et (81) admettent les $m+1$ intégrales ζ_s ($s=1, 2, \dots, m+1$) en commun, lesquelles sont linéairement indépendantes. Nous pouvons toujours choisir des coefficients

$$\mu_j \quad (j=0, 1, \dots, m-1), \quad \nu_i, \omega_i \quad (i=0, 1, \dots, q-1),$$

fonctions de x et de y , d'une telle manière qu'une identité

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{m-1} \mu_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z \equiv \\ & \equiv \sum_{j=0}^{q-1} \left(\nu_j \frac{\partial^{j+1}}{\partial x \partial y^j} + \omega_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \right) \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} + \rho \frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{i=0}^{m-1} \sigma_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \end{aligned}$$

ait lieu, et de même que Goursat¹⁾ l'a prouvé pour l'équation (1), l'on peut prouver à cet endroit aussi que nous aurons $\rho=0$ et $\sigma_i=0$ ($i=0, 1, \dots, m-1$). Ainsi existe l'identité

¹⁾ Goursat, Leçons. T. II page 26.

$$(81') \quad \sum_{j=0}^{m-1} \mu_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \equiv \sum_{j=0}^{q-1} \left(\nu_j \frac{\partial^{j+1}}{\partial x \partial y^j} + \omega_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \right) \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}.$$

Les deux équations différentielles linéaires

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$$

admettent par suite au moins une intégrale commune.

Supposons que les deux équations

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$$

n'admettent qu'une intégrale commune. Nous pouvons supposer que l'intégrale commune soit $\alpha_0 = f(x)$ (si ce n'était pas le cas, nous pourrions effectuer la substitution $z = \lambda \bar{z}$) ou autrement dit, nous pouvons poser $A_0 = \lambda_0 = 0$. — Supposons $B_0 = 0$. Les équations

$$\sum_{i=0}^{q-1} \left(A_{i+1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_{i+1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_1 = 0, \quad \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_{i+1} \frac{\partial^i z_1}{\partial y^i} = 0$$

admettent les $m+1$ intégrales

$$\zeta_{s1} \quad (s = 1, 2, \dots, m+1), \quad \text{où} \quad \zeta_{s1} = \frac{\partial \alpha_s}{\partial y},$$

en commun. De l'équation (80) il suit

$$\sum_{s=1}^{m+1} f_s(x) \zeta_{s1} = 0.$$

Mais comme les équations

$$\sum_{i=0}^{q-1} A_{i+1} \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_{i+1} \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$$

n'admettent pas d'intégrales communes, l'équation

$$\sum_{s=1}^{m+1} f_s(x) \zeta_{s1} = 0,$$

où les fonctions $f_s(x)$ ($s = 1, 2, \dots, m+1$) sont linéairement indépendantes, nous donne $\zeta_{i1} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m+1$) et par suite $\zeta_i = x_i$, x_i designant des fonctions de x . Et comme nous avons supposé qu'il n'existe qu'une relation de la forme (80) entre les intégrales ζ_s ($s = 1, 2, \dots, m+1$), nous avons $m = 1$. Réciproquement, si nous supposons $m = 1$, il en résulte directement que nous aurons $B_0 = 0$. Ainsi, dans le cas considéré, $m = 1$ est la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $B_0 = 0$. — Supposons maintenant $B_0 \neq 0$ (ou autrement dit $m > 1$). Écrivons

$$\sum_{j=0}^{m-1} \mu_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} = \sum_{j=0}^{m-2} \bar{\mu}_{j+1} \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \log B_0}{\partial y} \right) + \bar{\mu}_0.$$

Dans l'identité (81') le coefficient de z est $\bar{\mu}_0 B_0$, puisque $A_0 = \lambda_0 = 0$; par suite nous avons $\bar{\mu}_0 = 0$. En substituant $z_1 = \frac{\partial z}{\partial y}$, l'identité (81') peut ainsi s'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-2} \bar{\mu}_{j+1} \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left[B_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{B_0} \sum_{i=0}^{q-1} \left(A_{i+1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_{i+1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_1 \right) + B_0 z_1 \right] &\equiv \\ &\equiv \sum_{j=0}^{q-1} \left(\nu_j \frac{\partial^{j+1}}{\partial x \partial y^j} + \omega_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \right) \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_{i+1} \frac{\partial^i z_1}{\partial y^i}. \end{aligned}$$

Si l'on écrit l'équation qui définit z_1

$$\sum_{i=0}^q \left(A_{i1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_{i1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_1 = 0,$$

l'identité en question s'écrit

$$\sum_{j=0}^{m-2} \bar{\mu}_{j+1} \frac{\partial^j}{\partial y^j} \sum_{i=0}^q \left(A_{i1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_{i1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_1 \equiv \sum_{j=0}^{q-1} \left(\nu_j \frac{\partial^{j+1}}{\partial x \partial y^j} + \omega_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \right) \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_{i+1} \frac{\partial^i z_1}{\partial y^i}.$$

Nous pouvons continuer de cette manière. Après avoir appliqué $m-1$ transformations (t_1) , convenablement choisies, nous obtenons une identité de la forme

$$\sum_{i=0}^q \left(A_{i, m-1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_{i, m-1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_{m-1} \equiv \sum_{j=0}^{q-1} \left(\nu_j \frac{\partial^{j+1}}{\partial x \partial y^j} + \omega_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \right) \left(\bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial y} + \bar{\lambda}_0 \right) z_{m-1}.$$

L'équation qui définit z_{m-1} admet l'intégrale

$$\alpha X, \text{ où } \bar{\lambda}_1 \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \bar{\lambda}_0 \alpha = 0.$$

L'équation (20) admet ainsi une X -intégrale de rang m , laquelle est l'intégrale commune des deux équations (20) et (81). — Des $m+1$ intégrales ζ_s ($s = 1, 2, \dots, m+1$) nous pouvons directement déduire la X -intégrale de rang m . Écrivons

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_1'(x) & f_1''(x) & \dots & f_1^{(m)}(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) & f_2''(x) & \dots & f_2^{(m)}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m+1}(x) & f_{m+1}'(x) & f_{m+1}''(x) & \dots & f_{m+1}^{(m)}(x) \end{vmatrix}, \quad x_i = (-1)^m \frac{\partial \log \mathfrak{D}}{\partial f_i^{(m)}(x)} \quad (i=1, 2, \dots, m+1),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_1' & x_1'' & \dots & x_1^{(m)} \\ x_2 & x_2' & x_2'' & \dots & x_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m+1} & x_{m+1}' & x_{m+1}'' & \dots & x_{m+1}^{(m)} \end{vmatrix}.$$

Nous avons alors

$$f_i(x) = \frac{\partial \log \Delta}{\partial x_i^{(m)}} \quad (i = 1, 2, \dots, m+1).$$

Il suit de la relation (80) que les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ peuvent être choisis de manière que nous ayons

$$\zeta_i = \alpha_0 x_i^{(m-1)} + \alpha_1 x_i^{(m-2)} + \dots + \alpha_{m-1} x_i \quad (i = 1, 2, \dots, m+1).$$

L'équation (80) peut s'écrire

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x'_1 & \dots & x_1^{(m-1)} & \zeta_1 \\ x_2 & x'_2 & \dots & x_2^{(m-1)} & \zeta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{m+1} & x'_{m+1} & \dots & x_{m+1}^{(m-1)} & \zeta_{m+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous aurons

$$\frac{\alpha_0}{\frac{\partial \delta}{\partial x_r^{(m-1)}}} = \frac{\alpha_1}{\frac{\partial \delta}{\partial x_r^{(m-2)}}} = \dots = \frac{\alpha_{m-1}}{\frac{\partial \delta}{\partial x_r}} = \frac{-1}{\frac{\partial \delta}{\partial \zeta_r}} \quad (r = 1, 2, \dots, m+1),$$

et la X -intégrale de l'équation (20) est

$$\alpha_0 X^{(m-1)} + \alpha_1 X^{(m-2)} + \dots + \alpha_{m-1} X.$$

La valeur de α_0 est ainsi

$$\alpha_0 = - \frac{\frac{\partial \delta}{\partial x_r^{(m-1)}}}{\frac{\partial \delta}{\partial \zeta_r}} = - \sum_{s=1}^{m+1} f_r(x) \left(\frac{f_s(x)}{f_r(x)} \right)' \zeta_s = \sum_{s=1}^{m+1} f_s(x) \frac{\partial \zeta_s}{\partial x}.$$

C'est par suite la X -intégrale correspondant à

$$\sum_{s=1}^{m+1} f_s(x) \left(\frac{f_s(x)}{f_r(x)} \right)' \zeta_s$$

qui est obtenue de cette manière.

Supposons que les deux équations différentielles linéaires

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$$

admettent r intégrales distinctes en commun. Il en suit qu'il existe une identité de la forme

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{m-r} \mu_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z \equiv \\ & \equiv \sum_{j=0}^q \sum_{i=0}^r \left(\nu_j \frac{\partial^{j+1}}{\partial x \partial y^j} + \omega_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \right) \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} + \rho \frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{i=0}^{m-1} \sigma_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}. \end{aligned}$$

Comme auparavant, nous obtenons $\rho = 0$ et $\sigma_i = 0$ ($i = 0, 1, \dots, m-1$). En procédant toujours de la même manière, nous trouverons que l'équation (20) admet r X -intégrales distinctes et que la somme de leur rang est m , quand les X -intégrales sont écrites sous une telle forme que leur rang ne peut être réduit. Les r X -intégrales sont des intégrales communes des équations (20) et (81).

Réciproquement, il va de soi que, si l'équation (20) admet r X -intégrales distinctes

$$\alpha_{0i} X_i^{(m_i-1)} + \alpha_{1i} X_i^{(m_i-2)} + \dots + \alpha_{m_i-1,i} X_i \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

où $\sum_{i=1}^r m_i = m$, l'équation (20) admet $m+1$ intégrales

$$\zeta_s = \sum_{i=1}^r (\alpha_{0i} x_{si}^{(m_i-1)} + \alpha_{1i} x_{si}^{(m_i-2)} + \dots + \alpha_{m_i-1,i} x_{si}) \quad (s = 1, 2, \dots, m+1)$$

entre lesquelles existe une relation de la forme (80). Nous obtenons cette relation en éliminant les m coefficients $\alpha_{ji} \left(\begin{smallmatrix} j=0, 1, \dots, m_i-1 \\ i=1, 2, \dots, r \end{smallmatrix} \right)$ entre les $m+1$ équations qui donnent les valeurs des intégrales ζ_s ($s = 1, 2, \dots, m+1$). Si les r X -intégrales peuvent être écrites sous une telle forme que la somme de leur rang soit $m-p$, $p+1$ relations de la forme en question existent entre les intégrales.

Il est tout naturel d'essayer encore d'étendre le critérium de Goursat de manière à le faire valoir pour l' Y -intégrale de l'équation (20). Si l'équation (20) admet $q+1$ intégrales ζ_s ($s = 1, 2, \dots, q+1$) linéairement indépendantes entre lesquelles il existe q relations distinctes de la forme

$$\sum_{i=1}^{q+1} f_i(y) z_i = 0,$$

l'équation (20) admet toujours une Y -intégrale de rang 1; mais nous ne pouvons pas en conclure que si l'équation (20) admet $q+r$ intégrales ζ_s ($s = 1, 2, \dots, q+r$) linéairement indépendantes entre lesquelles il existe q relations distinctes de la forme

$$\sum_{i=1}^{q+r} f_i(y) z_i = 0,$$

l'équation (20) admette une Y -intégrale de rang r au plus; cela n'est pas le cas.

Dans ce chapitre, ainsi que dans le chapitre précédent, je suis parti de l'équation (20)

$$\sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0, \quad [A_q = 1; q+1 = n].$$

Tous les résultats obtenus peuvent, sans trop de difficulté, être étendus à l'équation (79)

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0, \quad A_q = 1; q+1 = n.$$

Ce n'est qu'en vue d'obtenir les résultats sous une forme aussi simple que possible que j'ai supposé $B_n = 0$.

III.

Dans ce chapitre, nous nous occuperons uniquement des équations (20) qui admettent n intégrales distinctes de la forme d'Euler et dont l'intégrale générale peut ainsi être obtenue sous forme explicite.

Pour l'équation (1), Darboux ¹⁾ a montré que, si l'équation admet une X -intégrale de rang $m + 1$ et une Y -intégrale de rang $r + 1$, l'intégrale générale peut s'écrire

$$(82) \quad z = M \begin{vmatrix} X & X' & \dots & X^{(m)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r)} \\ x_1 & x'_1 & \dots & x_1^{(m)} & y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(r)} \\ x_2 & x'_2 & \dots & x_2^{(m)} & y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_h & x'_h & \dots & x_h^{(m)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(r)} \end{vmatrix} \quad (h = m + r + 1),$$

$x_1, x_2, \dots, x_h$ étant des fonctions déterminées de x qui sont linéairement indépendantes, $y_1, y_2, \dots, y_h$ des fonctions déterminées de y qui sont linéairement indépendantes et le facteur non essentiel M une fonction déterminée de x et de y ; réciproquement, chaque expression de la forme (82), $x_1, x_2, \dots, x_h$ étant des fonctions déterminées de x et $y_1, y_2, \dots, y_h$ des fonctions déterminées de y et les coefficients de $X^{(m)}$ et de $Y^{(r)}$ dans le déterminant n'étant pas nuls, est l'intégrale générale d'une équation de la forme (1). L'équation qui définit z peut s'écrire

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \log \alpha}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \log \beta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \log \alpha}{\partial y} \frac{\partial \log \beta}{\partial y} \right) \frac{z}{M} = 0,$$

où

$$\alpha = \begin{vmatrix} x_1 & x'_1 & \dots & x_1^{(m-1)} & y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(r)} \\ x_2 & x'_2 & \dots & x_2^{(m-1)} & y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_h & x'_h & \dots & x_h^{(m-1)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(r)} \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} x_1 & x'_1 & \dots & x_1^{(m)} & y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(r-1)} \\ x_2 & x'_2 & \dots & x_2^{(m)} & y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(r-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_h & x'_h & \dots & x_h^{(m)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(r-1)} \end{vmatrix}.$$

¹⁾ DARBOUX, Leçons. Partie II, Chap. II.

De l'intégrale générale z , écrite sous la forme (82), Darboux obtient directement l'intégrale générale de toutes les équations qui sont obtenues en appliquant les transformations de Laplace à l'équation (1). Darboux a montré que l'intégrale générale de l'équation (E_i) ($m \geq i > -r$) est

$$z_i = N \begin{vmatrix} X & X' & \dots & X^{(m-i)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r+i)} \\ x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(m-i)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(r+i)} \\ x_2 & x_2' & \dots & x_2^{(m-i)} & y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(r+i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_h & x_h' & \dots & x_h^{(m-i)} & y_h & y_h' & \dots & y_h^{(r+i)} \end{vmatrix} \quad (h = r + m + 1),$$

où le facteur N peut être choisi arbitrairement, puisque (E_i) désigne toutes les équations équivalentes. Puis Darboux ¹⁾ a montré que l'intégrale générale de l'équation adjointe (E') peut être déduite directement de l'intégrale générale de l'équation (E) , mise sous la forme (82); l'intégrale générale de l'équation (E') est

$$u = N \begin{vmatrix} X & X' & \dots & X^{(r)} & Y & Y' & \dots & Y^{(m)} \\ \xi_1 & \xi_1' & \dots & \xi_1^{(r)} & \eta_1 & \eta_1' & \dots & \eta_1^{(m)} \\ \xi_2 & \xi_2' & \dots & \xi_2^{(r)} & \eta_2 & \eta_2' & \dots & \eta_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_h & \xi_h' & \dots & \xi_h^{(r)} & \eta_h & \eta_h' & \dots & \eta_h^{(m)} \end{vmatrix},$$

où

$$\xi_i = \frac{\partial \log \Delta}{\partial x_i^{(m+r)}}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(m+r)} \\ x_2 & x_2' & \dots & x_2^{(m+r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_h & x_h' & \dots & x_h^{(m+r)} \end{vmatrix}; \quad \eta_i = \frac{\partial \log \mathfrak{D}}{\partial y_i^{(m+r)}}; \quad \mathfrak{D} = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(m+r)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(m+r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_h & y_h' & \dots & y_h^{(m+r)} \end{vmatrix}.$$

Nous allons essayer d'étendre ces résultats à l'équation (20).

Chaque expression de la forme

$$(83) \quad z = \begin{vmatrix} X_1 & X_1' & \dots & X_1^{(m_1)} & X_2 & X_2' & \dots & X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X_q' & \dots & X_q^{(m_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r)} \\ x_{11} & x_{11}' & \dots & x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x_{12}' & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x_{1q}' & \dots & x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(r)} \\ x_{21} & x_{21}' & \dots & x_{21}^{(m_1)} & x_{22} & x_{22}' & \dots & x_{22}^{(m_2)} & \dots & x_{2q} & x_{2q}' & \dots & x_{2q}^{(m_q)} & y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x_{h1}' & \dots & x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x_{h2}' & \dots & x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x_{hq}' & \dots & x_{hq}^{(m_q)} & y_h & y_h' & \dots & y_h^{(r)} \end{vmatrix},$$

$$\left(h = \sum_{i=1}^q m_i + r + q \right)$$

où le coefficient de $Y^{(r)}$ n'est pas nul et où n'existe aucune relation de la forme

$$(84) \quad \sum_{i=1}^q f_i(x) a_{0i} = 0,$$

¹⁾ DARBOUX, Leçons. Partie II, Chap. VI (page 131).

α_{0i} ($i = 1, 2, \dots, q$) désignant les coefficients de $X_i^{(m_i)}$, est l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre n . Par x_{ij} je désigne toujours des fonctions déterminées de x et par y_i des fonctions déterminées de y . La proposition peut être démontrée de la manière suivante. En différentiant l'équation (83), nous pouvons obtenir

$$\frac{\partial^{q+1}z}{\partial x \partial y^q}, \frac{\partial^q z}{\partial x \partial y^{q-1}}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^q z}{\partial y^q}, \frac{\partial^{q-1}z}{\partial y^{q-1}}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y}$$

comme des fonctions linéaires et homogènes de

$$X_1, X'_1, \dots, X_1^{(m_1+1)}, X_2, X'_2, \dots, X_2^{(m_2+1)}, \dots, X_q, X'_q, \dots, X_q^{(m_q+1)}, Y, Y', \dots, Y^{(r+q)},$$

les coefficients étant des fonctions déterminées de x et de y . Entre les $2q+1$ équations qui déterminent ces dérivées, nous pouvons éliminer les $2q$ quantités

$$X_i^{(m_i+1)}, Y^{(r+i)} \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Nous obtiendrons de cette manière une expression de la forme

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^{i+1}z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=1}^q B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i},$$

qui contient les dérivées de X_i ($i = 1, 2, \dots, q$) jusqu'à l'ordre m_i au plus, les dérivées de Y jusqu'à l'ordre r au plus et qui s'annule pour

$$\left. \begin{aligned} Y &= y_i, \\ X_j &= x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, q) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

Il en résulte que l'expression obtenue ne diffère que par un facteur du déterminant (83); z satisfait par suite à une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0.$$

Comme il n'existe pas de relation de la forme (84), α_{0i} étant les coefficients de $X_i^{(m_i)}$ dans le déterminant (83), les q X -intégrales dans le déterminant (83) ne peuvent être remplacées par un nombre de X -intégrales moindre de q (selon la proposition 1). Le déterminant (83) est ainsi l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre n .

Si nous supposons que le coefficient de $Y^{(r)}$ dans le déterminant (83) ne soit pas nul et qu'il existe s , et pas plus de s , relations distinctes de la forme (84), le déterminant (83) est l'intégrale générale d'une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0, \quad A_q \neq 0.$$

Cela peut être prouvé de la manière suivante. Comme il existe s — et pas plus de s — relations distinctes de la forme (84), les q quantités α_{0i} ($i = 1, 2, \dots, q$) déterminent une équation d'ordre $q-s$

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z_0}{\partial y^i} = 0.$$

En différentiant l'équation (83), nous pouvons obtenir

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i}, \quad \frac{\partial^{q-s} z}{\partial y^{q-s}}, \quad \frac{\partial^{q-s-1} z}{\partial y^{q-s-1}}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y},$$

comme des fonctions linéaires et homogènes de

$$X_1, X'_1, \dots, X_1^{(m_1)}, X_2, X'_2, \dots, X_2^{(m_2)}, \dots, X_q, X'_q, \dots, X_q^{(m_q)}, Y, Y', \dots, Y^{(r+q-s)}.$$

les coefficients étant des fonctions déterminées de x et de y . En éliminant entre les équations obtenues les $q-s$ quantités $Y^{(r+i)}$ ($i=1, 2, \dots, q-s$), nous obtenons une expression de la forme

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=1}^q B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i},$$

qui contient les dérivées de X_i ($i=1, 2, \dots, q$) jusqu'à l'ordre m_i au plus, les dérivées de Y jusqu'à l'ordre r au plus et qui s'annule pour

$$\left. \begin{array}{l} Y = y_i \\ X_j = x_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, q) \end{array} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, h).$$

Ainsi l'expression obtenue ne diffère que par un facteur du déterminant (83), et z satisfait à une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0.$$

Comme il n'existe que s relations distinctes de la forme (84), les q X -intégrales dans le déterminant (83) ne peuvent être remplacées par un nombre de X -intégrales moindre de $q-s$. Le déterminant (83) est ainsi l'intégrale générale d'une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^q \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0; \quad A_0 = 1.$$

— La condition nécessaire et suffisante pour que les q X -intégrales dans le déterminant (83) puissent être remplacées par $q-s$ X -intégrales est ainsi qu'il existe s relations distinctes de la forme (84).

Enfin, si nous supposons que le coefficient de $Y^{(r)}$ dans le déterminant (83) soit nul, il en résulte que z satisfait à une équation de la forme

$$\frac{\partial z}{\partial y} + B_0 z = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le déterminant (83) dépende d'une fonction arbitraire de y est ainsi que le coefficient de $Y^{(r)}$ ne soit pas nul.

Proposition 14. Chaque expression de la forme

$$\begin{vmatrix} X_1 & X'_1 \dots X_1^{(m_1)} & X_2 & X'_2 \dots X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X'_q \dots X_q^{(m_q)} & Y & Y' \dots Y^{(r)} \\ x_{11} & x'_{11} \dots x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} \dots x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y'_1 \dots y_1^{(r)} \\ x_{21} & x'_{21} \dots x_{21}^{(m_1)} & x_{22} & x'_{22} \dots x_{22}^{(m_2)} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} \dots x_{2q}^{(m_q)} & y_2 & y'_2 \dots y_2^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r)} \end{vmatrix},$$

$$\left(h = \sum_{i=1}^q m_i + r + q \right)$$

le coefficient de $Y^{(r)}$ n'étant pas nul et les coefficients de $X_i^{(m_i)}$ ($i = 1, 2, \dots, q$) déterminant une équation d'ordre $q - s$

$$\sum_{i=0}^{q-s} A_i \frac{\partial^i x_0}{\partial y^i} = 0,$$

représente l'intégrale générale d'une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{q-s} \left(A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0; \quad A_{q-s} = 1.$$

Avant de démontrer la réciproque de cette proposition, nous allons examiner sous quelles conditions les X -intégrales dans le déterminant (83) peuvent être remplacées par des intégrales de rang inférieur à $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$ ou l' Y -intégrale est de rang inférieur à $r + 1$, puis nous allons aussi examiner de plus près les conditions nécessaires et suffisantes pour que le déterminant (83) dépende d'une fonction arbitraire de Y et de $q - s$ fonctions arbitraires de x .

Supposons qu'existent les p relations

$$y_k = \sum_{i=p+1}^h a_{ik} y_i \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

les coefficients a_{ik} étant des constantes. Dans le déterminant (83) nous pourrions remplacer

$$x_{kj} \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad y_k$$

par

$$x_{kj} - \sum_{i=p+1}^h a_{ik} x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad y_k - \sum_{i=p+1}^h a_{ik} y_i;$$

de cette manière toutes les y_k ($k = 1, 2, \dots, p$) seront remplacées par zéro. Supposons que les substitutions en question aient déjà été faites, ou autrement dit, supposons

$$y_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Nous pouvons toujours supposer $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$. Supposons

$$x_{1i} = 0 \quad (i = s + 1, s + 2, \dots, q), \quad x_{1s} \neq 0.$$

En effectuant la substitution

$$\left. \begin{aligned} X_j &= \bar{X}_j + \frac{x_{1j}}{x_{1s}} X_s, \\ x_{kj} &= \bar{x}_{kj} + \frac{x_{1j}}{x_{1s}} x_{ks} \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, s-1),$$

$$X_s = x_{1s} X_s,$$

$$x_{ks} = \bar{x}_{1s} x_{ks} \quad (k = 1, 2, \dots, h),$$

le déterminant (83) peut s'écrire

$$(x_{1s})^{m_s+1} \begin{vmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}'_1 & \dots & \bar{X}_1^{(m_1)} & \dots & \bar{X}_s & \bar{X}'_s & \dots & \bar{X}_s^{(m_s)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(m_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(q)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{x}_{21} & \bar{x}'_{21} & \dots & \bar{x}_{21}^{(m_1)} & \dots & \bar{x}_{2s} & \bar{x}'_{2s} & \dots & \bar{x}_{2s}^{(m_s)} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} & \dots & x_{2q}^{(m_q)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p+1,1} & \bar{x}'_{p+1,1} & \dots & x_{p+1,1}^{(m_1)} & \dots & x_{p+1,s} & \bar{x}'_{p+1,s} & \dots & x_{p+1,s}^{(m_s)} & \dots & x_{p+1,q} & \bar{x}'_{p+1,q} & \dots & x_{p+1,q}^{(m_q)} & y_{p+1} & y'_{p+1} & \dots & y_{p+1}^{(q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & \bar{x}'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1)} & \dots & x_{hs} & \bar{x}'_{hs} & \dots & x_{hs}^{(m_s)} & \dots & x_{hq} & \bar{x}'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(q)} \end{vmatrix}$$

où le coefficient de X_s est nul, et l'ordre du déterminant peut se diminuer directement d'une unité. De même, nous pouvons continuer, l'ordre du déterminant peut être diminué de p unités. Ainsi pour chaque relation de la forme

$$\sum_{i=1}^h a_i y_i = 0,$$

les coefficients a_i étant des constantes, l'ordre du déterminant (83) peut se diminuer d'une unité.

Supposons qu'existent les q relations

$$x_{1j} = \sum_{i=2}^h a_i x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, q),$$

les coefficients a_i étant des constantes. Dans le déterminant (83), nous pourrions remplacer

$$x_{1j} \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad y_1$$

par

$$x_{1j} = \sum_{i=2}^h a_i x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad y_1 = \sum_{i=2}^h a_i y_i;$$

par cette substitution, x_{1j} ($j = 1, 2, \dots, q$) seront remplacées par zéro. Supposons que la substitution en question ait été déjà faite, ou autrement dit, supposons

$$x_{1j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, q).$$

En effectuant la substitution

$$Y = y_1 \bar{Y}, \quad y_k = y_1 y_k \quad (k = 1, 2, \dots, h),$$

le déterminant (83) s'obtiendra sous une telle forme que le coefficient de Y sera nul; l'ordre du déterminant peut se diminuer d'une unité, et le rang de l' Y -intégrale est r au plus. Lorsqu'existent les qs relations

$$x_{kj} = \sum_{i=s+1}^h a_{ik} x_{ij} \quad \left(\begin{matrix} j = 1, 2, \dots, q \\ k = 1, 2, \dots, s \end{matrix} \right).$$

où a_{ik} sont des constantes, l'ordre du déterminant (83) peut se diminuer, de la même manière, de s unités, et le rang de l' Y -intégrale est $r + 1 - s$ au plus.

Nous voyons ainsi qu'il faut, pour que les X -intégrales dans le déterminant (83) soient de rang $m_1 + 1$, $m_2 + 1$, ... $m_q + 1$ et ne puissent être remplacées par des intégrales de rang inférieur et que l' Y -intégrale soit de rang $r + 1$, que y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) soient linéairement indépendantes et qu'une même relation linéaire et homogène de la forme

$$(84') \quad \sum_{i=1}^h a_i x_{ij} = 0,$$

les coefficients a_i étant des constantes, n'existe pas pour $j = 1, 2, \dots, q$.

Nous allons examiner si ces conditions sont suffisantes aussi.

Supposons que, dans le déterminant (83), y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) soient linéairement indépendantes et qu'une même relation de la forme (84') n'existe pas pour $j = 1, 2, \dots, q$. Nous allons montrer que, dans le cas où le coefficient de $Y^{(q)}$ n'est pas nul, le déterminant (83) ne s'annule que pour

$$X_j = \sum_{i=1}^h b_i x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad Y = \sum_{i=1}^h b_i y_i,$$

les coefficients b_i étant des constantes. Supposons que le déterminant (83) s'annule pour

$$X_j = f_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad Y = g(y).$$

On pourra déterminer des coefficients finis λ_i ($i = 1, 2, \dots, h$) tels que l'on ait

$$g^{(k)}(y) = \sum_{i=1}^h \lambda_i y_i^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, r), \quad f_j^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^h \lambda_i x_{ij}^{(k)} \quad \left(\begin{matrix} k = 0, 1, \dots, m_j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right).$$

En différenciant ces équations par rapport à y , nous obtiendrons les h équations

$$\sum_{i=1}^h \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} y_i^{(k_1)} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, r-1), \quad \sum_{i=1}^h \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} x_{ij}^{(k)} = 0 \quad \left(\begin{matrix} k = 0, 1, \dots, m_j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right).$$

Comme nous avons supposé que le coefficient de $Y^{(q)}$ dans le déterminant (83) ne soit pas nul, nous obtiendrons de ces h équations les h conditions

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

En différentiant l'équation

$$g(y) = \sum_{i=1}^h \lambda_i y_i$$

par rapport à x , nous obtiendrons

$$\sum_{i=1}^h \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} y_i = 0.$$

Comme λ_i ($i = 1, 2, \dots, h$) sont des fonctions de x , et que y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) sont linéairement indépendantes, il suit de la condition

$$\sum_{i=1}^h \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} y_i = 0$$

que toutes les λ_i ($i = 1, 2, \dots, h$) sont des constantes. Nous avons ainsi montré que les fonctions $f_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, q$) et $g(y)$ sont de la forme

$$f_j(x) = \sum_{i=1}^h \lambda_i x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad g(y) = \sum_{i=1}^h \lambda_i y_i,$$

où λ_i ($i = 1, 2, \dots, h$) sont des constantes. La preuve en question est la même que celle que Darboux¹⁾ a donnée pour le cas où $q = 1$. Pour $q = 1$, le coefficient de $Y^{(r)}$ ne peut être nul sans qu'une relation de la forme

$$\sum_{i=1}^h a_i x_i = 0,$$

a_i étant des constantes, ait lieu; mais dans le cas où $q > 1$, le coefficient de $Y^{(r)}$ peut très bien être nul sans qu'une même relation de la forme (84') ait lieu pour $j = 1, 2, \dots, q$. La supposition que le coefficient de $Y^{(r)}$ ne soit pas nul est ainsi essentielle, mais la supposition qu'une même relation de la forme (84') n'ait pas lieu pour $j = 1, 2, \dots, q$ est superflue.

Supposons que le coefficient de $Y^{(r)}$ dans le déterminant (83) ne soit pas nul, que y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) soient linéairement indépendantes et qu'une même relation de la forme (84') n'existe pas pour $j = 1, 2, \dots, q$. Nous avons vu que le déterminant ne s'annule que pour

$$X_j = \sum_{i=1}^h b_i x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad Y = \sum_{i=1}^h b_i y_i,$$

b_i étant des constantes. Il suit de la proposition 1 que la condition nécessaire et suffisante pour que les q X -intégrales dans le déterminant (83) puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur à $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$ est que le déterminant s'annule pour

¹⁾ DARBOUX, Leçons. Partie II, pages 51, 52.

$$X_j = f_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad Y = 0,$$

où toutes les $f_j(x)$ ne sont pas nulles. Comme y_i ($i = 1, 2, \dots, q$) sont linéairement indépendantes, cette condition ne peut être remplie. Et la condition nécessaire et suffisante pour que l' Y -intégrale soit de rang inférieur à $r + 1$ est que le déterminant s'annule pour

$$X_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad Y = g(y) \neq 0.$$

Mais comme il ne peut exister q relations

$$\sum_{i=1}^h b_i x_{ij} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, q),$$

b_i étant des constantes, cette condition ne peut être remplie.

La condition nécessaire et suffisante pour que les X -intégrales dans le déterminant (83) soient de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$ et ne puissent être remplacées par des intégrales de rang inférieur et que l' Y -intégrale soit de rang $r + 1$, est ainsi que le coefficient de $Y^{(r)}$ ne soit pas nul, que y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) soient linéairement indépendantes et qu'une même relation de la forme (84') n'existe pas pour $j = 1, 2, \dots, q$.

Nous allons maintenant examiner de plus près les conditions pour que le déterminant (83) dépende d'une fonction arbitraire de y et de q fonctions arbitraires de x (voir page 110).

Le coefficient de $Y^{(r)}$ dans le déterminant (83) est (abstraction faite du signe)

$$(85) \mathcal{A} = \begin{vmatrix} x_{11} & x'_{11} & \dots & x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(r-1)} \\ x_{21} & x'_{21} & \dots & x_{21}^{(m_1)} & x_{22} & x'_{22} & \dots & x_{22}^{(m_2)} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} & \dots & x_{2q}^{(m_q)} & y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(r-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(r-1)} \end{vmatrix}.$$

Si y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) sont linéairement indépendantes, le déterminant (85) n'est nul que si tous les coefficients de $y_i^{(r-1)}$ ($i = 1, 2, \dots, h$) dans le déterminant (85) sont nuls, ce qui suit de la preuve donnée pages 113, 114. Il en résulte que, si y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) sont linéairement indépendantes, le déterminant (85) n'est nul que si tous les coefficients de

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_h \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_h \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(r-1)} & y_2^{(r-1)} & \dots & y_h^{(r-1)} \end{vmatrix} \quad ^1)$$

¹⁾ La notation

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} \end{vmatrix} \quad (h > k)$$

dans le déterminant (85) sont nuls. Si toutes les y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) ne sont pas linéairement indépendantes, mais que p relations linéaires et homogènes aient lieu entre y_i ($i = 1, 2, \dots, h$), p des quantités y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) peuvent être remplacées par zéro dans le déterminant (83) (voir page 111). Supposons que les substitutions en question aient été faites, autrement dit, supposons que l'on ait

$$y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

et que y_i ($i = p+1, p+2, \dots, h$) soient linéairement indépendantes. Alors le déterminant (85) n'est nul que si tous les coefficients de $y_i^{(r-1)}$ ($i = p+1, p+2, \dots, h$) dans le déterminant (85) sont nuls (ce qui peut être prouvé à peu près comme auparavant). De cela nous pouvons encore déduire que le déterminant (85), où $y_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, p$) et où y_i ($i = p+1, p+2, \dots, h$) sont linéairement indépendantes, n'est nul que si tous les coefficients de

$$\begin{vmatrix} y_{p+1} & y_{p+2} & \dots & y_h \\ y_{p+1} & y_{p+2} & \dots & y_h \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{p+1}^{(r-1)} & y_{p+2}^{(r-1)} & \dots & y_h^{(r-1)} \end{vmatrix}$$

dans le déterminant (85) sont nuls.

Nous avons trouvé (page 110) que la condition nécessaire et suffisante pour que les q X -intégrales dans le déterminant (83) puissent être remplacées par $q-k$ X -intégrales est que k relations distinctes de la forme (84) existent, α_{0i} étant les coefficients de $X_i^{m_i}$ dans le déterminant (83). — Lorsque le coefficient de $Y^{(n)}$ est nul, il existe $q-1$ relations distinctes du type en question. — Supposons que le coefficient de $Y^{(p)}$ dans le déterminant (83) ne soit pas nul. Nous allons examiner quelles conditions doivent être remplies pour qu'une relation de la forme (84) existe. La condition nécessaire et suffisante pour que les q X -intégrales puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur à $m_1+1, m_2+1, \dots, m_q+1$ est que y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) ne soient pas linéairement indépendantes. Supposons que p — et pas plus de p — relations linéaires et homogènes distinctes existent entre y_i ($i = 1, 2, \dots, h$). Supposons que les substitutions de la page 111 aient été faites, ou autrement dit, supposons que l'on ait

$$y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

et que y_i ($i = p+1, p+2, \dots, h$) soient linéairement indépendantes. J'ai déjà montré comment l'ordre du déterminant peut se diminuer de p unités (voir pages

est employée pour désigner tous les déterminants

$$\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} & \dots & a_{1s} \\ a_{2i} & a_{2j} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ki} & a_{kj} & \dots & a_{ks} \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, h \\ j = 1, 2, \dots, h \\ \vdots \\ s = 1, 2, \dots, h \end{pmatrix}.$$

111, 112). Il en résulte que l'existence d'une relation de la forme (84) dépend seulement des valeurs de

$$x_{ij} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, q \end{pmatrix}.$$

Supposons $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$. Si nous supposons que la relation

$$\alpha_{0s} = \sum_{j=1}^{s-1} g_j(x) \alpha_{0j}$$

existe, nous obtiendrons, en appliquant la substitution

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \bar{x}_{ij} - g_j(x) x_{is}^{(m_s - m_j)} \\ X_j &= \bar{X}_j - g_j(x) X_s^{(m_s - m_j)} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, h \\ j = 1, 2, \dots, s-1 \end{pmatrix},$$

le déterminant (83) sous une telle forme que le coefficient de $X_s^{(m_s)}$ sera nul. La condition nécessaire et suffisante en est que tous les déterminants

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \bar{x}_{11} \dots \bar{x}_{11}^{(m_1)} & \dots & x_{1, s-1} \dots x_{1, s-1}^{(m_s-1)} & x_{1s} \dots x_{1s}^{(m_s-1)} & x_{1, s+1} \dots x_{1, s+1}^{(m_{s+1})} & \dots & x_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{p1} \dots x_{p1}^{(m_1)} & \dots & x_{p, s-1} \dots x_{p, s-1}^{(m_s-1)} & x_{ps} \dots x_{ps}^{(m_s-1)} & x_{p, s+1} \dots x_{p, s+1}^{(m_{s+1})} & \dots & x_{pq} \dots x_{pq}^{(m_q)} \end{array} \right\| \quad {}^1)$$

c'est-à-dire les déterminants qui se composent des colonnes

$$\bar{x}_{ij}^{(k)} \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \dots, m_j \\ j = 1, 2, \dots, s-1 \end{pmatrix}, \quad x_{is}^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, m_s-1), \quad x_{ij}^{(k)} \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \dots, m_j \\ j = s+1, s+2, \dots, q \end{pmatrix},$$

soient nuls, car y_i ($i = p+1, p+2, \dots, h$) sont linéairement indépendantes et le coefficient de $Y^{(p)}$ dans le déterminant (83) est supposé non nul; (la seconde ligne dans les déterminants exclue seulement pour abréger, ici comme, de règle, plus loin dans les déterminants du même type). Une condition nécessaire en est que tous les déterminants

$$(86) \quad \left\| \begin{array}{cccccc} x_{11} \dots x_{11}^{(m_1-1)} & \dots & x_{1s} \dots x_{1s}^{(m_s-1)} & x_{1, s+1} \dots x_{1, s+1}^{(m_{s+1})} & \dots & x_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{p1} \dots x_{p1}^{(m_1-1)} & \dots & x_{ps} \dots x_{ps}^{(m_s-1)} & x_{p, s+1} \dots x_{p, s+1}^{(m_{s+1})} & \dots & x_{pq} \dots x_{pq}^{(m_q)} \end{array} \right\| \quad {}^1)$$

soient nuls. Si nous supposons que les déterminants (86) soient nuls, sans que tous les déterminants

$$(86') \quad \left\| \begin{array}{cccccc} x_{11} \dots x_{11}^{(m_1-1)} & \dots & x_{1, s-1} \dots x_{1, s-1}^{(m_{s-1}-1)} & x_{1s} \dots x_{1s}^{(m_s)} & \dots & x_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{p1} \dots x_{p1}^{(m_1-1)} & \dots & x_{p, s-1} \dots x_{p, s-1}^{(m_{s-1}-1)} & x_{ps} \dots x_{ps}^{(m_s)} & \dots & x_{pq} \dots x_{pq}^{(m_q)} \end{array} \right\| \quad {}^1)$$

soient nuls, la relation

$$\alpha_{0s} = \sum_{i=1}^{s-1} g_i(x) \alpha_{0i}$$

¹⁾ C'est seulement pour abréger que les termes x_{ij} non pas été écrits dans ces déterminants.

existe, où

$$\begin{vmatrix} x_{1s}^{(m_s)} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1, p-1} \\ x_{2s}^{(m_s)} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2, p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{ps}^{(m_s)} & u_{p1} & u_{p2} & \dots & u_{p, p-1} \end{vmatrix} g_i(x) + \begin{vmatrix} x_{1i}^{(m_i)} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1, p-1} \\ x_{2i}^{(m_i)} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2, p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{pi}^{(m_i)} & u_{p1} & u_{p2} & \dots & u_{p, p-1} \end{vmatrix} = 0.$$

les colonnes $u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_{j, p-1}$ étant $p-1$ des colonnes

$$x_{ji}^{(k)} \quad \left(\begin{matrix} k = 0, 1, \dots, m_i - 1 \\ i = 1, 2, \dots, s \end{matrix} \right), \quad x_{ji}^{(k)} \quad \left(\begin{matrix} k = 0, 1, \dots, m_i \\ i = s+1, s+2, \dots, q \end{matrix} \right).$$

Comme tous les déterminants (86) sont nuls, il est indifférent lesquelles des quantités en question seront choisies pour $u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_{j, p-1}$, pourvu qu'elles soient choisies de manière que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_{1s}^{(m_s)} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1, p-1} \\ x_{2s}^{(m_s)} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2, p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{ps}^{(m_s)} & u_{p1} & u_{p2} & \dots & u_{p, p-1} \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul; cela est toujours possible, puisque tous les déterminants (86') ne sont pas nuls. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une relation de la forme (84) existe, est ainsi que tous les déterminants

$$\left\| \begin{matrix} x_{11} & x'_{11} & \dots & x_{11}^{(m_1-1)} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x_{12}^{(m_2-1)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x_{1q}^{(m_q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x'_{p1} & \dots & x_{p1}^{(m_1-1)} & x_{p2} & x'_{p2} & \dots & x_{p2}^{(m_2-1)} & \dots & x_{pq} & x'_{pq} & \dots & x_{pq}^{(m_q-1)} \end{matrix} \right\|$$

soient nuls; si tous les déterminants (86) sont nuls, sans que tous les déterminants (86') soient nuls, la relation $\alpha_{0s} = \sum_{i=1}^{s-1} g_i(x) \alpha_{0i}$ existe, et dans chacun des déterminants

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(m_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(m_q)} \\ x_{11} & x'_{11} & \dots & x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x_{1q}^{(m_q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x'_{p1} & \dots & x_{p1}^{(m_1)} & x_{p2} & x'_{p2} & \dots & x_{p2}^{(m_2)} & \dots & x_{pq} & x'_{pq} & \dots & x_{pq}^{(m_q)} \end{matrix} \right\|$$

la relation $\bar{\alpha}_{0s} = \sum_{i=1}^{s-1} g_i(x) \bar{\alpha}_{0i}$ existe entre les coefficients de $X_i^{(m_i)}$, qui sont désignés par

$\bar{\alpha}_{0i}$; aucune relation de la forme $\alpha_{0t} = \sum_{i=1}^{t-1} f_i(x) \alpha_{0i}$ ne peut exister pour $t < s$, mais

bien pour $t > s$; une condition nécessaire en est que tous les déterminants

$$\left\| \begin{matrix} x_{1s} \dots x_{1s}^{(m_s)} & x_{11} \dots x_{11}^{(m_1-1)} & \dots & x_{1t} \dots x_{1t}^{(m_t-1)} & x_{1, t+1} \dots x_{1, t+1}^{(m_{t+1})} & \dots & x_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{ps} \dots x_{ps}^{(m_s)} & x_{p1} \dots x_{p1}^{(m_1-1)} & \dots & x_{pt} \dots x_{pt}^{(m_t-1)} & x_{p, t+1} \dots x_{p, t+1}^{(m_{t+1})} & \dots & x_{pq} \dots x_{pq}^{(m_q)} \end{matrix} \right\|$$

soient nuls (c'est seulement pour abréger que les termes x'_{ij} ont été exclus dans ces derniers déterminants et ce n'est qu'en vue de plus de netteté que l'ordre des termes a été changé). Etc.

Nous avons ainsi trouvé que la condition nécessaire et suffisante pour que le déterminant (83) où $y_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, p$) et où y_i ($i = p + 1, p + 2, \dots, h$) sont linéairement indépendantes soit l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre $q + 1$ est que tous les coefficients de

$$\begin{vmatrix} y_{p+1} & y_{p+2} & \dots & y_h \\ y'_{p+1} & y'_{p+2} & \dots & y'_h \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(r-1)}_{p+1} & y^{(r-1)}_{p+2} & \dots & y^{(r-1)}_h \end{vmatrix}$$

dans le déterminant (85) ne soient pas nuls, et que tous les déterminants

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x'_{11} & \dots & x^{(m_1-1)}_{11} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x^{(m_2-1)}_{12} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x^{(m_q-1)}_{1q} \\ x_{21} & x'_{21} & \dots & x^{(m_1-1)}_{21} & x_{22} & x'_{22} & \dots & x^{(m_2-1)}_{22} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} & \dots & x^{(m_q-1)}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x'_{p1} & \dots & x^{(m_1-1)}_{p1} & x_{p2} & x'_{p2} & \dots & x^{(m_2-1)}_{p2} & \dots & x_{pq} & x'_{pq} & \dots & x^{(m_q-1)}_{pq} \end{vmatrix}$$

ne soient pas nuls.

Nous allons maintenant prouver la proposition suivante (la réciproque de la proposition 14). Lorsque l'équation (20) admet une Y -intégrale de rang $r + 1$ et q X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$ qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur, l'intégrale générale de l'équation (20) peut s'écrire

$$(87) \quad z = M \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X^{(m_1)}_1 & X_2 & X'_2 & \dots & X^{(m_2)}_2 & \dots & X_q & X'_q & \dots & X^{(m_q)}_q & Y & Y' & \dots & Y^{(r)} \\ x_{11} & x'_{11} & \dots & x^{(m_1)}_{11} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x^{(m_2)}_{12} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x^{(m_q)}_{1q} & y_1 & y'_1 & \dots & y^{(r)}_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x^{(m_1)}_{h1} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x^{(m_2)}_{h2} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x^{(m_q)}_{hq} & y_h & y'_h & \dots & y^{(r)}_h \end{vmatrix},$$

$$\left(h = \sum_{i=1}^q m_i + r + q \right)$$

où y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) sont linéairement indépendantes, où une même relation de la forme (84') n'existe pas pour $j = 1, 2, \dots, q$, où le coefficient de $Y^{(r)}$ n'est pas nul et où le facteur non essentiel M est une fonction déterminée de x et de y . Pour l'équation (1), Darboux a démontré la proposition en question. Supposons que la proposition soit vraie pour les équations du type (20) d'ordre $n - 1$, nous allons montrer qu'alors elle est valable aussi pour l'équation (20).

Supposons que l'équation (20) admette une Y -intégrale de rang $r + 1$ et q X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$ qui ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur. Supposons $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$. L'équation (20) peut être ramenée par m_1 transformations (t_1) , convenablement choisies, à une équation de même type et de même ordre admettant une Y -intégrale de rang $r + m_1 + 1$ et q X -intégrales de rang $1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$ qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur. L'intégrale générale de cette dernière équation est de la forme

$$(88) \quad z_{m_1} = \sum_{i=2}^q (\alpha_{0i} X_i^{(m_i)} + \alpha_{1i} X_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_{m_i i} X_i) + \\ + \alpha_{01} X_1 + \beta_0 Y^{(r+m_1)} + \beta_1 Y^{(r+m_1-1)} + \dots + \beta_{r+m_1} Y.$$

En appliquant la transformation $z_{m_1+1} = \alpha_{01} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_{m_1}}{\alpha_{01}}$, nous obtiendrons une équation d'ordre $n-1$ admettant une Y -intégrale de rang $r+m_1+2$ au plus et $q-1$ X -intégrales de rang $m_2+1, m_3+1, \dots, m_q+1$ qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur. Supposons que l' Y -intégrale soit de rang $r+m_1+2-s$. Comme nous avons supposé que la proposition à démontrer soit vraie pour les équations du type (20) d'ordre $n-1$, l'intégrale générale z_{m_1+1} peut s'écrire

$$(89) \quad z_{m_1+1} = M \begin{vmatrix} X_2 & X_2' & \dots & X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X_q' & \dots & X_q^{(m_q)} & \bar{Y} & \bar{Y}' & \dots & \bar{Y}^{(r+m_1+1-s)} \\ x_{12} & x_{12}' & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x_{1q}' & \dots & x_{1q}^{(m_q)} & \bar{y}_1 & \bar{y}_1' & \dots & \bar{y}_1^{(r+m_1+1-s)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h-s, 2} & x_{h-s, 2}' & \dots & x_{h-s, 2}^{(m_2)} & \dots & x_{h-s, q} & x_{h-s, q}' & \dots & x_{h-s, q}^{(m_q)} & \bar{y}_{h-s} & \bar{y}_{h-s}' & \dots & \bar{y}_{h-s}^{(r+m_1+1-s)} \end{vmatrix},$$

$$\left(h = \sum_{i=1}^q m_i + r + q \right)$$

où $\bar{y}_i$ ($i = 1, 2, \dots, h-s$) sont linéairement indépendantes, où une même relation de la forme

$$\sum_{i=1}^{h-s} a_i x_{ij} = 0,$$

a_i étant des constantes, n'existe pas pour $j = 2, 3, \dots, q$ et où le coefficient de $\bar{Y}^{(r+m_1+1-s)}$ n'est pas nul. Écrivons

$$\bar{Y} = \begin{vmatrix} Y & Y' & \dots & Y^{(s)} \\ y_{h-s+1} & y_{h-s+1}' & \dots & y_{h-s+1}^{(s)} \\ y_{h-s+2} & y_{h-s+2}' & \dots & y_{h-s+2}^{(s)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_h & y_h' & \dots & y_h^{(s)} \end{vmatrix}, \quad y_i = \begin{vmatrix} y_i & y_i' & \dots & y_i^{(s)} \\ y_{h-s+1} & y_{h-s+1}' & \dots & y_{h-s+1}^{(s)} \\ y_{h-s+2} & y_{h-s+2}' & \dots & y_{h-s+2}^{(s)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_h & y_h' & \dots & y_h^{(s)} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, h-s);$$

toutes les y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) sont linéairement indépendantes. L'intégrale générale z_{m_1+1} peut s'écrire

$$(89') \quad z_{m_1+1} = \bar{M} \begin{vmatrix} X_2 & X_2' & \dots & X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X_q' & \dots & X_q^{(m_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r+m_1+1)} \\ x_{12} & x_{12}' & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x_{1q}' & \dots & x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(r+m_1+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h-s, 2} & x_{h-s, 2}' & \dots & x_{h-s, 2}^{(m_2)} & \dots & x_{h-s, q} & x_{h-s, q}' & \dots & x_{h-s, q}^{(m_q)} & y_{h-s} & y_{h-s}' & \dots & y_{h-s}^{(r+m_1+1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & y_{h-s+1} & y_{h-s+1}' & \dots & y_{h-s+1}^{(r+m_1+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & y_h & y_h' & \dots & y_h^{(r+m_1+1)} \end{vmatrix},$$

car le déterminant de (89') ne diffère de celui de (89) que par un facteur, fonction de y , qui n'est pas nul. Les coefficients

$$\alpha_{ij} \quad \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \dots, m_j \\ j = 2, 3, \dots, q \end{matrix} \right), \quad \beta_i \quad (i = 0, 1, \dots, r + m_1)$$

et les fonctions

$$y_i \quad (i = h - s + 1, h - s + 2, \dots, h)$$

peuvent être déterminés de telle manière que l'égalité

$$z_{m_1+1} = \alpha_{01} \frac{\partial z_{m_1}}{\partial y \alpha_{01}},$$

où z_{m_1+1} est définie par l'équation (89') et z_{m_1} par l'équation (88), existe pour toutes les formes possibles des fonctions arbitraires $X_2, X_3, \dots, X_q, Y$. En substituant, dans l'identité obtenue de cette manière,

$$\left. \begin{matrix} X_j = x_{ij} & (j = 2, 3, \dots, q) \\ Y = y_i \end{matrix} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, h - s)$$

et en intégrant, nous obtiendrons les $h - s$ équations

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^q (\alpha_{0j} x_{ij}^{(m_j)} + \alpha_{1j} x_{ij}^{(m_j-1)} + \dots + \alpha_{m_j j} x_{ij}) + \beta_0 y_i^{(r+m_1)} + \\ + \beta_1 y_i^{(r+m_1-1)} + \dots + \beta_{r+m_1} y_i + \alpha_{01} x_{i1} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, h - s); \end{aligned}$$

et de même, en substituant

$$\left. \begin{matrix} X_j = 0 & (j = 2, 3, \dots, q) \\ Y = y_i \end{matrix} \right\} \quad (i = h - s + 1, h - s + 2, \dots, h)$$

et en intégrant, nous aurons les s équations

$$\beta_0 y_i^{(r+m_1)} + \beta_1 y_i^{(r+m_1-1)} + \dots + \beta_{r+m_1} y_i + \alpha_{01} x_{i1} = 0 \quad (i = h - s + 1, h - s + 2, \dots, h).$$

De ces h équations il suit que l'intégrale générale z_{m_1} peut s'écrire

$$(90) \quad z_{m_1} = \bar{M} \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_2' & \dots & X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X_q' & \dots & X_q^{(m_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r+m_1)} \\ x_{11} & x_{12} & x_{12}' & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x_{1q}' & \dots & x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(r+m_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h-s, 1} & x_{h-s, 2} & x_{h-s, 2}' & \dots & x_{h-s, 2}^{(m_2)} & \dots & x_{h-s, q} & x_{h-s, q}' & \dots & x_{h-s, q}^{(m_q)} & y_{h-s} & y_{h-s}' & \dots & y_{h-s}^{(r+m_1)} \\ x_{h-s+1, 1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & y_{h-s+1} & y_{h-s+1}' & \dots & y_{h-s+1}^{(r+m_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & y_h & y_h' & \dots & y_h^{(r+m_1)} \end{vmatrix},$$

pourvu que ce déterminant ne soit pas identiquement nul. Le coefficient de X_1 dans le déterminant (90) est toujours le même que le coefficient de $Y^{(r+m_1+1)}$ dans le déterminant (89') (abstraction faite du signe), et ce coefficient n'est pas nul; par conséquent, le déterminant (90) n'est pas identiquement nul, et l'intégrale générale

(88) peut s'écrire sous la forme (90). L'équation dont l'intégrale générale est z_{m_1} a été obtenue par l'application de m_1 transformations (t_1) à l'équation (20); si nous appliquons seulement $m_1 - 1$ de ces transformations (t_1) à l'équation (20), nous obtiendrons une équation qui admet une Y -intégrale de rang $r + m_1$ et q X -intégrales de rang 2, $m_2 + 1, \dots, m_q + 1$ qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur. L'intégrale générale de la dernière équation est de la forme

$$(91) \quad z_{m_1-1} = \sum_{i=2}^q (\bar{\alpha}_{0i} \bar{X}_i^{(m_i)} + \bar{\alpha}_{1i} \bar{X}_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_{m_i i} \bar{X}_i) + \dots \\ + \bar{\alpha}_{01} \bar{X}_1' + \alpha_{11} \bar{X}_1 + \bar{\beta}_0 Y^{(r+m_1-1)} + \bar{\beta}_1 Y^{(r+m_1-2)} + \dots + \bar{\beta}_{r+m_1-1} Y,$$

les coefficients étant des fonctions déterminées de x et de y . Nous avons

$$z_{m_1} = \bar{\alpha}_{01} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_{m_1-1}}{\bar{\alpha}_{01}},$$

et nous savons que z_{m_1-1} peut s'exprimer linéairement à l'aide de z_{m_1} et de dérivés de z_{m_1} . L'intégrale générale z_{m_1} est donnée par l'équation (90), de l'autre côté nous avons

$$z_{m_1} = \alpha_{01} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_{m_1-1}}{\alpha_{01}},$$

où z_{m_1-1} est donnée par l'équation (91). Il faut qu'il existe une substitution de la forme

$$X_1 = g_1(x) \bar{X}_1 + \sum_{j=2}^q \sum_{k=0}^{m_j} f_{1jk}(x) \bar{X}_j^{(k)}, \\ X_i = g_i(x) \bar{X}_i + \sum_{j=i+1}^q \sum_{k=0}^{m_j} f_{ijk}(x) \bar{X}_j^{(k)} \quad (i = 2, 3, \dots, q),$$

où $g_i(x) \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, q$), qui fait passer, l'une à l'autre, les deux expressions des q X -intégrales de l'intégrale z_{m_1} . Si nous effectuons cette substitution, nous obtiendrons l'intégrale générale (90) toujours sous la forme d'un déterminant;

$$X_i \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad x_{li} \quad \begin{pmatrix} l = 1, 2, \dots, h \\ i = 1, 2, \dots, q \end{pmatrix}$$

seront remplacées par $X_i, \bar{x}_{li}$, où

$$x_{l1} = g_1(x) \bar{x}_{l1} + \sum_{j=2}^q \sum_{k=0}^{m_j} f_{1jk}(x) \bar{x}_{lj}^{(k)} \quad (l = 1, 2, \dots, h), \\ x_{li} = g_i(x) \bar{x}_{li} + \sum_{j=i+1}^q \sum_{k=0}^{m_j} f_{ijk}(x) \bar{x}_{lj}^{(k)} \quad \begin{pmatrix} l = 1, 2, \dots, h \\ i = 2, 3, \dots, q \end{pmatrix},$$

et le déterminant sera multiplié par un facteur, fonction de x . Il va de soi qu'une fonction $f(y)$ peut être choisie telle que, si l'on remplace Y par $f(y)Y$ dans l'équation (91), les deux expressions de l' Y -intégrale de l'intégrale z_{m_1} coïncident; suppo-

sons que cette substitution ait déjà été faite. Ainsi les coefficients $f_{ijk}(x)$, $g_i(x)$ peuvent être choisis de manière que les relations entre z_{m_1-1} et z_{m_1} soient vérifiées pour toutes les formes possibles des fonctions arbitraires, lorsque z_{m_1-1} est définie par l'équation (91) et z_{m_1} par l'équation

$$(92) \quad z_{m_1} = \bar{M} \begin{vmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}_2' & \dots & \bar{X}_2^{(m_2)} & \dots & \bar{X}_q & \bar{X}_q' & \dots & \bar{X}_q^{(m_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r+m_1)} \\ \bar{x}_{11} & \bar{x}_{12} & \bar{x}_{12}' & \dots & \bar{x}_{12}^{(m_2)} & \dots & \bar{x}_{1q} & \bar{x}_{1q}' & \dots & \bar{x}_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(r+m_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{x}_{h1} & \bar{x}_{h2} & \bar{x}_{h2}' & \dots & \bar{x}_{h2}^{(m_2)} & \dots & \bar{x}_{hq} & \bar{x}_{hq}' & \dots & \bar{x}_{hq}^{(m_q)} & y_h & y_h' & \dots & y_h^{(r+m_1)} \end{vmatrix}.$$

Il en résulte que l'expression de z_{m_1-1} donnée par l'équation (91) s'annule pour

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_j &= \bar{x}_{ij} & (j = 1, 2, \dots, q) \\ Y &= y_i \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, h);$$

et l'intégrale générale z_{m_1-1} est, à un facteur près, qui est une fonction déterminée de x et de y ,

$$(93) \quad \begin{vmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_1' & \bar{X}_2 & \bar{X}_2' & \dots & \bar{X}_2^{(m_2)} & \dots & \bar{X}_q & \bar{X}_q' & \dots & \bar{X}_q^{(m_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r+m_1-1)} \\ x_{11} & x_{11}' & x_{12} & x_{12}' & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x_{1q}' & \dots & x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(r+m_1-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x_{h1}' & x_{h2} & x_{h2}' & \dots & x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x_{hq}' & \dots & x_{hq}^{(m_q)} & y_h & y_h' & \dots & y_h^{(r+m_1-1)} \end{vmatrix},$$

pourvu que ce déterminant ne soit pas identiquement nul. Le coefficient de X_1' dans le déterminant (93) est toujours le même que le coefficient de $Y^{(r+m_1)}$ dans le déterminant (92) (abstraction faite du signe), et ce coefficient n'est pas nul; par conséquent, le déterminant (93) n'est pas identiquement nul. En continuant de cette manière, nous pouvons démontrer que l'intégrale générale de l'équation (20) est de la forme (87). Par conséquent, si la proposition en question est vraie pour les équations du type (20) d'ordre $n-1$, elle est vraie aussi pour l'équation (20); donc, comme la proposition est valable pour l'équation (1), elle est prouvée pour l'équation (20).

Nous partons maintenant de la supposition que l'intégrale générale de l'équation (20) soit donnée sous la forme (83); le coefficient de $Y^{(r)}$ dans le déterminant (83) n'est pas nul, et aucune relation de la forme (84), α_{0i} étant les coefficients de $X_i^{(m_i)}$, n'a lieu. Nous allons examiner si l'intégrale générale de l'équation (E_i) ($i \geq 0$) peut se déduire directement de l'intégrale générale (83).

L'intégrale générale de l'équation (E_i) ($i > 0$) peut être obtenue directement de l'intégrale générale (83). Supposons $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$. De même que pour l'équation (1), l'on trouve que l'intégrale générale de l'équation (E_i) ($m_1 \geq i > 0$) est

$$(94) \quad N \begin{vmatrix} X_1 & X_1' & \dots & X_1^{(m_1-i)} & X_2 & X_2' & \dots & X_2^{(m_2-i)} & \dots & X_q & X_q' & \dots & X_q^{(m_q-i)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r+q-i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x_{h1}' & \dots & x_{h1}^{(m_1-i)} & x_{h2} & x_{h2}' & \dots & x_{h2}^{(m_2-i)} & \dots & x_{hq} & x_{hq}' & \dots & x_{hq}^{(m_q-i)} & y_h & y_h' & \dots & y_h^{(r+q-i)} \end{vmatrix}$$

(la seconde ligne dans le déterminant exclue seulement pour abrégé, ici comme, de règle, plus loin dans les déterminants du même type), pourvu que ce déterminant ne soit pas identiquement nul; comme (E_i) désigne toutes les équations équivalentes, le facteur non essentiel N peut être choisi arbitrairement. Supposons que y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) soient linéairement indépendantes. Le déterminant (94) ne peut être identiquement nul, car le coefficient de $Y^{(r+qi)}$ n'est nul qu'à condition que le coefficient de $Y^{(r)}$ dans le déterminant (83) le soit aussi. De même, l'intégrale générale de l'équation (E_i) ($m_2 \geq i > m_1$) est

$$N \begin{vmatrix} X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(m_2-i)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(m_q-i)} & Y & Y' & \dots & Y^{(t)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2-i)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q-i)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(t)} \end{vmatrix},$$

$$(t = r + i(q-1) + m_1 + 1)$$

etc.— Mais supposons que l'on ait $y_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, p$) et que y_i ($i = p+1, p+2, \dots, h$) soient linéairement indépendantes. Le déterminant (94) est identiquement nul seulement si tous les déterminants

$$\left\| \begin{array}{cccccc} x_{11} & x'_{11} & \dots & x_{11}^{(m_1-i)} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x_{12}^{(m_2-i)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x_{1q}^{(m_q-i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x'_{p1} & \dots & x_{p1}^{(m_1-i)} & x_{p2} & x'_{p2} & \dots & x_{p2}^{(m_2-i)} & \dots & x_{pq} & x'_{pq} & \dots & x_{pq}^{(m_q-i)} \end{array} \right\|$$

sont nuls, c'est-à-dire seulement si l'équation (E) admet une X -intégrale de rang inférieur à i .

Si nous appliquons la transformation

$$z_1 = \alpha_{0s} \frac{\partial}{\partial y} z$$

à l'équation (20), nous obtiendrons une équation dont l'intégrale générale est

$$z_1 = M \begin{vmatrix} X_1 & \dots & X_1^{(m_1)} & \dots & X_{s-1} & \dots & X_{s-1}^{(m_{s-1})} & X_s & \dots & X_s^{(m_s-1)} & X_{s+1} & \dots & X_{s+1}^{(m_{s+1})} & \dots & X_q & \dots & X_q^{(m_q)} & Y & \dots & Y^{(r+1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ x_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1)} & \dots & x_{h,s-1} & \dots & x_{h,s-1}^{(m_{s-1})} & x_{hs} & \dots & x_{hs}^{(m_s-1)} & x_{h,s+1} & \dots & x_{h,s+1}^{(m_{s+1})} & \dots & x_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q)} & y_h & \dots & y_h^{(r+1)} \end{vmatrix}$$

où M désigne toujours une fonction déterminée de x et de y . Et chaque expression de la forme

$$N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(m_1-\bar{m}_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(m_2-\bar{m}_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(m_q-\bar{m}_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(t)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1-\bar{m}_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2-\bar{m}_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q-\bar{m}_q)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(t)} \end{vmatrix}$$

$$\left(t = r + \sum_{i=1}^q \bar{m}_i; \quad m_i + 1 \geq \bar{m}_i \geq 0 \right)$$

¹⁾ C'est seulement par manque de place qu'ici, et parfois plus loin, les termes X'_j , x'_{ij} , Y' , y'_i n'ont pas été écrits dans les déterminants.

est l'intégrale générale d'une équation, obtenue de l'équation (E) à l'aide de $\sum_{i=1}^q \bar{m}_i$ transformations (t_1); bien entendu, à condition que le déterminant en question ne soit pas identiquement nul.

L'équation (20) peut s'écrire (47)

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[\gamma \sum_{i=0}^{q-1} \left(R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \right] + Tz = 0, \quad \text{où } R_{q-1} = 1.$$

Si nous appliquons la transformation

$$z_{-1} = \sum_{i=0}^{q-1} \left(R_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z,$$

où

$$\sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_{0j}}{\partial y^i} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, q),$$

nous obtiendrons une équation dont l'intégrale générale est, à un facteur près, qui est une fonction déterminée de x et de y ,

$$(95) \quad \begin{vmatrix} X_1 \dots X_1^{(m_1)} & \dots & X_{s-1} \dots X_{s-1}^{(m_{s-1})} & X_s \dots X_s^{(m_s+1)} & X_{s+1} \dots X_{s+1}^{(m_{s+1})} & \dots & X_q \dots X_q^{(m_q)} & Y \dots Y^{(r-1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1)} & \dots & x_{h,s-1} \dots x_{h,s-1}^{(m_{s-1})} & x_{hs} \dots x_{hs}^{(m_s+1)} & x_{h,s+1} \dots x_{h,s+1}^{(m_{s+1})} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q)} & y_h \dots y_h^{(r-1)} \end{vmatrix},$$

pourvu que ce déterminant ne soit pas identiquement nul. Mais il ne peut être identiquement nul, parce que le coefficient de $X_s^{(m_s+1)}$ est le même que le coefficient de $Y^{(r)}$ dans le déterminant (83). Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) soit de la forme

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[\gamma \sum_{i=0}^{q-1} \left(R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \right] = 0,$$

où

$$\sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_{0j}}{\partial y^i} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, q),$$

est que le coefficient de $Y^{(r-1)}$ dans le déterminant (95) soit nul.

Supposons que l'équation adjointe (E') n'admette pas de X -intégrale de rang 1 et appliquons la transformation complètement déterminée (T_{-1}) à l'équation (E). L'intégrale générale de l'équation (E_{-1}) est

$$(96) \quad N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 \dots X_1^{(m_1+1)} & X_2 & X'_2 \dots X_2^{(m_2+1)} & \dots & X_q & X'_q \dots X_q^{(m_q+1)} & Y & Y' \dots Y^{(r-q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1+1)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2+1)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q+1)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r-q)} \end{vmatrix}.$$

pourvu que le déterminant obtenu ne soit pas identiquement nul. En considérant la transformation (T_{-1}) comme composée de q transformations (t_{-1}), nous trouvons,

à l'aide des résultats de la page précédente, que le coefficient de $Y^{(r-q)}$ dans le déterminant (96) ne peut être nul, puisque l'équation (E) n'admet pas de X -intégrale de rang 1. — Mais si nous supposons que l'équation adjointe (E') admette une X -intégrale de rang 1, il en résulte que le coefficient de $Y^{(r-q)}$ dans le déterminant (96) est nul. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (E') admette une X -intégrale de rang 1 est ainsi que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x'_{11} \dots x_{11}^{(m_1+1)} & x_{12} & x'_{12} \dots x_{12}^{(m_2+1)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q+1)} & y_1 & y'_1 \dots y_1^{(r-q-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1+1)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2+1)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q+1)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r-q-1)} \end{vmatrix}$$

soit nul. — De la même manière, nous pouvons montrer que l'intégrale générale de l'équation (E_{-i}) d'ordre n est

$$(96') \quad N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 \dots X_1^{(m_1+i)} & X_2 & X'_2 \dots X_2^{(m_2+i)} & \dots & X_q & X'_q \dots X_q^{(m_q+i)} & Y & Y' \dots Y^{(r-qi)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1+i)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2+i)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q+i)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r-qi)} \end{vmatrix}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (E') n'admette pas une X -intégrale de rang inférieur à $i+1$ est que le coefficient de $Y^{(r-qi)}$ dans le déterminant (96') ne soit pas nul.

Proposition 15. Lorsque l'équation (E) admet une Y -intégrale de rang $r+1$ et q X -intégrales de rang m_1+1 , m_2+1 , ... m_q+1 qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur, l'intégrale générale peut s'écrire

$$N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 \dots X_1^{(m_1)} & X_2 & X'_2 \dots X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X'_q \dots X_q^{(m_q)} & Y & Y' \dots Y^{(r)} \\ x_{11} & x'_{11} \dots x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} \dots x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y'_1 \dots y_1^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r)} \end{vmatrix};$$

$$\left(h = \sum_{i=1}^q m_i + r + q \right)$$

y_i ($i=1, 2, \dots, h$) sont des fonctions de y qui sont linéairement indépendantes, x_{ij} ($i=1, 2, \dots, h$) sont des fonctions de x entre lesquelles il n'existe pas une même relation de la forme

$$\sum_{i=1}^h a_i x_{ij} = 0,$$

a_i étant des constantes, pour $j=1, 2, \dots, q$, et le coefficient de $Y^{(r)}$ n'est pas nul; (E) désignant toutes les équations équivalentes, le facteur non essentiel N peut être

choisi arbitrairement. Supposons que l'intégrale générale de l'équation (E) soit donnée sous la forme considérée, y_i et x_{ij} remplissant les conditions ci-dessus nommées. Supposons $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$. L'intégrale générale de l'équation E_i ($m_s \geq i > m_{s-1}$) est

$$N \begin{vmatrix} X_s & X'_s \dots X_s^{(m_s-i)} & \dots & X_q & X'_q \dots X_q^{(m_q-i)} & Y & Y' \dots Y^{(r_i)} \\ x_{1s} & x'_{1s} \dots x_{1s}^{(m_s-i)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q-i)} & y_1 & y'_1 \dots y_1^{(r_i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{hs} & x'_{hs} \dots x_{hs}^{(m_s-i)} & \dots & x_{hs} & x'_{hs} \dots x_{hs}^{(m_q-i)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r_i)} \end{vmatrix}.$$

$$\left(r_i = r + i(q - s + 1) + \sum_{j=1}^{s-1} (m_j + 1) \right)$$

Et l'intégrale générale de l'équation (E_{-i}) d'ordre n est

$$N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 \dots X_1^{(m_1+i)} & X_2 & X'_2 \dots X_2^{(m_2+i)} & \dots & X_q & X'_q \dots X_q^{(m_q+i)} & Y & Y' \dots Y^{(r-qi)} \\ x_{11} & x'_{11} \dots x_{11}^{(m_1+i)} & x_{12} & x'_{12} \dots x_{12}^{(m_2+i)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q+i)} & y_1 & y'_1 \dots y_1^{(r-qi)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1+i)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2+i)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q+i)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r-qi)} \end{vmatrix}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (E') admette une X -intégrale de rang inférieur à $i + 1$ [l'équation (E_{-i}) étant ainsi d'ordre inférieur à n] est que le coefficient de $Y^{(r-qi)}$ dans le dernier déterminant soit nul.

Aussi l'intégrale générale de l'équation adjointe (23) peut être déduite directement de l'intégrale générale de l'équation (20), donnée sous la forme (83). Avant de démontrer cette déduction, je vais d'abord prouver quelques thèses de déterminants, dont je me servirai après pour déduire l'intégrale générale de l'équation (20), donnée sous la forme (83).

Écrivons

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} x_{11} & x'_{11} \dots x_{11}^{(n_1)} & x_{12} & x'_{12} \dots x_{12}^{(n_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(n_q)} \\ x_{21} & x'_{21} \dots x_{21}^{(n_1)} & x_{22} & x'_{22} \dots x_{22}^{(n_2)} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} \dots x_{2q}^{(n_q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(n_1)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(n_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(n_q)} \end{vmatrix} \quad \left(h = \sum_{i=1}^q n_i + q \right).$$

Supposons $\mathfrak{D} \neq 0$. Écrivons

$$\xi_{ij} = \frac{\partial \log \mathfrak{D}}{\partial x_{ij}^{(n_j)}} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, h \\ j = 1, 2, \dots, q \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$(97) \quad \left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^h x_{ij}^{(k)} \xi_{il} &= 0 & (k=0, 1, \dots, n_j-1), \\ \sum_{i=1}^h x_{ij}^{(n_j)} \xi_{il} &= 0 & (j \neq l), \quad \sum_{i=1}^h x_{ij}^{(n_j)} \xi_{ij} = 1 \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} j=1, 2, \dots, q \\ l=1, 2, \dots, q \end{pmatrix}.$$

En différentiant nous obtiendrons

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^h x_{ij}^{(k_1)} \xi_{il}^{(k_2)} &= 0 & (k_1 + k_2 = 0, 1, \dots, n_j-1), \\ \sum_{i=1}^h x_{ij}^{(n_j-k)} \xi_{il}^{(k)} &= 0 & (j \neq l), \quad \sum_{i=1}^h x_{ij}^{(n_j-k)} \xi_{ij}^{(k)} = (-1)^k \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} j=1, 2, \dots, q \\ l=1, 2, \dots, q \end{pmatrix}.$$

$$\text{Écrivons } \Delta = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi'_{11} \dots \xi_{11}^{(n_1)} & \xi_{12} & \xi'_{12} \dots \xi_{12}^{(n_2)} & \dots & \xi_{1q} & \xi'_{1q} \dots \xi_{1q}^{(n_q)} \\ \xi_{21} & \xi'_{21} \dots \xi_{21}^{(n_1)} & \xi_{22} & \xi'_{22} \dots \xi_{22}^{(n_2)} & \dots & \xi_{2q} & \xi'_{2q} \dots \xi_{2q}^{(n_q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi'_{h1} \dots \xi_{h1}^{(n_1)} & \xi_{h2} & \xi'_{h2} \dots \xi_{h2}^{(n_2)} & \dots & \xi_{hq} & \xi'_{hq} \dots \xi_{hq}^{(n_q)} \end{vmatrix}.$$

Si non multiplions, nous trouvons $\Delta \mathfrak{D} = 1$. Écrivons ensuite

$$\mathfrak{D}_1 = \begin{vmatrix} y_1 & y'_1 \dots y_1^{(h-1)} \\ y_2 & y'_2 \dots y_2^{(h-1)} \\ \vdots & \vdots \\ y_h & y'_h \dots y_h^{(h-1)} \end{vmatrix}, \quad \eta_i = \frac{\partial \log \mathfrak{D}_1}{\partial y_i^{(h-1)}} \quad (i=1, 2, \dots, h);$$

nous sommes partis de la supposition $\mathfrak{D}_1 \neq 0$. Nous avons

$$\sum_{i=1}^h y_i^{(k_1)} \eta_i^{(k_2)} = 0 \quad (k_1 + k_2 = 0, 1, \dots, h-2), \quad \sum_{i=1}^h y_i^{(h-k-1)} \eta_i^{(k)} = (-1)^k.$$

Et écrivons

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta'_1 \dots \eta_1^{(h-1)} \\ \eta_2 & \eta'_2 \dots \eta_2^{(h-1)} \\ \vdots & \vdots \\ \eta_h & \eta'_h \dots \eta_h^{(h-1)} \end{vmatrix}.$$

Si nous multiplions, nous trouvons $\Delta_1 \mathfrak{D}_1 = 1$.

Si nous multiplions, colonne par colonne, les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1q} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2q} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{q1} & \xi_{q2} & \dots & \xi_{qq} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_{q+1,1} & \xi_{q+1,2} & \dots & \xi_{q+1,q} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_{q+2,1} & \xi_{q+2,2} & \dots & \xi_{q+2,q} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi_{h2} & \dots & \xi_{hq} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{11} & x'_{11} \dots x_{11}^{(n_1)} & x_{12} & x'_{12} \dots x_{12}^{(n_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(n_q)} \\ x_{21} & x'_{21} \dots x_{21}^{(n_1)} & x_{22} & x'_{22} \dots x_{22}^{(n_2)} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} \dots x_{2q}^{(n_q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(n_1)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(n_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(n_q)} \end{vmatrix}.$$

nous trouverons

$$\mathfrak{D} \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1q} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{q1} & \xi_{q2} & \dots & \xi_{qq} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} x_{q+1,1} \dots x_{q+1,1}^{(n_1-1)} & x_{q+1,2} \dots x_{q+1,2}^{(n_2-1)} & \dots & x_{q+1,q} \dots x_{q+1,q}^{(n_q-1)} \\ x_{q+2,1} \dots x_{q+2,1}^{(n_1-1)} & x_{q+2,2} \dots x_{q+2,2}^{(n_2-1)} & \dots & x_{q+2,q} \dots x_{q+2,q}^{(n_q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} \dots x_{h1}^{(n_1-1)} & x_{h2} \dots x_{h2}^{(n_2-1)} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(n_q-1)} \end{vmatrix}^{1)}$$

(comme le signe est sans importance à ce sujet, je ne l'écris pas). De même, nous aurons

$$\mathfrak{D} \begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1,s-1} & \xi_{1,s+1} & \dots & \xi_{1q} \\ \xi_{21} & \dots & \xi_{2,s-1} & \xi_{2,s+1} & \dots & \xi_{2q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{q-1,1} & \dots & \xi_{q-1,s-1} & \xi_{q-1,s+1} & \dots & \xi_{q-1,q} \end{vmatrix} =$$

$$= \pm \begin{vmatrix} x_{q1} \dots x_{q1}^{(n_1-1)} & \dots & x_{q,s-1} \dots x_{q,s-1}^{(n_{s-1}-1)} & x_{qs} \dots x_{qs}^{(n_s)} & x_{q,s+1} \dots x_{q,s+1}^{(n_{s+1}-1)} & \dots & x_{qq} \dots x_{qq}^{(n_q-1)} \\ x_{q+1,1} \dots x_{q+1,1}^{(n_1-1)} & \dots & x_{q+1,s-1} \dots x_{q+1,s-1}^{(n_{s-1}-1)} & x_{q+1,s} \dots x_{q+1,s}^{(n_s)} & x_{q+1,s+1} \dots x_{q+1,s+1}^{(n_{s+1}-1)} & \dots & x_{q+1,q} \dots x_{q+1,q}^{(n_q-1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} \dots x_{h1}^{(n_1-1)} & \dots & x_{h,s-1} \dots x_{h,s-1}^{(n_{s-1}-1)} & x_{hs} \dots x_{hs}^{(n_s)} & x_{h,s+1} \dots x_{h,s+1}^{(n_{s+1}-1)} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(n_q-1)} \end{vmatrix}.$$

Nous avons ensuite

$$\mathfrak{D}_1 \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta'_1 & \dots & \eta_1^{(k-1)} \\ \eta_2 & \eta'_2 & \dots & \eta_2^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_k & \eta'_k & \dots & \eta_k^{(k-1)} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} y_{k+1} & y'_{k+1} & \dots & y_{k+1}^{(h-k-1)} \\ y_{k+2} & y'_{k+2} & \dots & y_{k+2}^{(h-k-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_h & y'_h & \dots & y_h^{(h-k-1)} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, h-1).$$

Il en résulte

$$\mathfrak{D} \mathfrak{D}_1 \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1q} & \eta_1 & \dots & \eta_1^{(h-q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi_{h2} & \dots & \xi_{hq} & \eta_h & \dots & \eta_h^{(h-q-1)} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{11}^{(n_1-1)} & x_{12} \dots x_{12}^{(n_2-1)} & \dots & x_{1q} \dots x_{1q}^{(n_q-1)} & y_1 & \dots & y_1^{(q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} \dots x_{h1}^{(n_1-1)} & x_{h2} \dots x_{h2}^{(n_2-1)} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(n_q-1)} & y_h & \dots & y_h^{(q-1)} \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{D} \mathfrak{D}_1 \begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1,s-1} & \xi_{1,s+1} & \dots & \xi_{1q} & \eta_1 & \dots & \eta_1^{(h-q)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{h1} & \dots & \xi_{h,s-1} & \xi_{h,s+1} & \dots & \xi_{hq} & \eta_h & \dots & \eta_h^{(h-q)} \end{vmatrix} =$$

$$= \pm \begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{11}^{(n_1-1)} & \dots & x_{1,s-1} \dots x_{1,s-1}^{(n_{s-1}-1)} & x_{1,s} \dots x_{1,s}^{(n_s)} & x_{1,s+1} \dots x_{1,s+1}^{(n_{s+1}-1)} & \dots & x_{1q} \dots x_{1q}^{(n_q-1)} & y_1 & \dots & y_1^{(q-2)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} \dots x_{h1}^{(n_1-1)} & \dots & x_{h,s-1} \dots x_{h,s-1}^{(n_{s-1}-1)} & x_{hs} \dots x_{hs}^{(n_s)} & x_{h,s+1} \dots x_{h,s+1}^{(n_{s+1}-1)} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(n_q-1)} & y_h & \dots & y_h^{(q-2)} \end{vmatrix};$$

pour abréger, je n'écris pas, de règle, la deuxième ligne dans les déterminants.

¹⁾ C'est seulement pour abréger qu'ici les termes x'_{ij} n'ont pas été écrits dans le déterminant, comme c'est parfois plus loin le cas pour les termes η'_k , y'_t , ξ'_{ij} .

Maintenant nous allons chercher la condition pour que l'on ait

$$\mathfrak{D} \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi'_{11} & \dots & \xi_{11}^{(r_1-1)} & \xi_{12} & \xi'_{12} & \dots & \xi_{12}^{(r_2-1)} & \dots & \xi_{1q} & \xi'_{1q} & \dots & \xi_{1q}^{(r_q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{r1} & \xi'_{r1} & \dots & \xi_{r1}^{(r_1-1)} & \xi_{r2} & \xi'_{r2} & \dots & \xi_{r2}^{(r_2-1)} & \dots & \xi_{rq} & \xi'_{rq} & \dots & \xi_{rq}^{(r_q-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= + \begin{vmatrix} x_{r+1,1} & x'_{r+1,1} & \dots & x_{r+1,1}^{(m_1)} & x_{r+1,2} & x'_{r+1,2} & \dots & x_{r+1,2}^{(m_2)} & \dots & x_{r+1,q} & x'_{r+1,q} & \dots & x_{r+1,q}^{(m_q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q)} \end{vmatrix}.$$

où $n_i = m_i + r_i$, $\sum_{i=1}^q r_i = r$. En faisant la multiplication dans le premier membre, colonne par colonne, nous trouverons qu'une condition suffisante pour que cette égalité ait lieu est

$$\sum_{i=1}^h x_{ij}^{(k_i)} \xi_{il}^{(k_l)} = 0 \quad \left(\begin{matrix} k_1 + k_2 = 0, 1, \dots, m_j + r_l - 1 \\ j = 1, 2, \dots, q; \quad l = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right).$$

Ces conditions peuvent s'écrire

$$(98) \quad \sum_{i=1}^h x_{ij}^{(k)} \xi_{il} = 0 \quad \left(\begin{matrix} k = 0, 1, \dots, m_j + r_l - 1 \\ j = 1, 2, \dots, q; \quad l = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right).$$

Écrivons $\sum_{i=1}^q m_i = m$. Dans le cas où les conditions (98) sont remplies, nous aurons ainsi

$$(99) \quad \mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\mathfrak{B} = \pm \mathfrak{A},$$

où

$$\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi'_{11} & \dots & \xi_{11}^{(r_1-1)} & \xi_{12} & \xi'_{12} & \dots & \xi_{12}^{(r_2-1)} & \dots & \xi_{1q} & \xi'_{1q} & \dots & \xi_{1q}^{(r_q-1)} & \eta_1 & \eta'_1 & \dots & \eta_1^{(m+q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi'_{h1} & \dots & \xi_{h1}^{(r_1-1)} & \xi_{h2} & \xi'_{h2} & \dots & \xi_{h2}^{(r_2-1)} & \dots & \xi_{hq} & \xi'_{hq} & \dots & \xi_{hq}^{(r_q-1)} & \eta_h & \eta'_h & \dots & \eta_h^{(m+q-1)} \end{vmatrix}$$

et où $\mathfrak{A}$ est défini par l'équation (85); l'égalité obtenue a lieu aussi dans le cas où la colonne ξ_{ij} manque, c'est-à-dire, si $r_j = 0$; de même l'égalité a lieu dans le cas où $m_j = -1$, c'est-à-dire, si la colonne x_{ij} manque.

Écrivons

$$(100) \quad \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(r_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(r_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(r_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(m)} \\ \xi_{11} & \xi'_{11} & \dots & \xi_{11}^{(r_1)} & \xi_{12} & \xi'_{12} & \dots & \xi_{12}^{(r_2)} & \dots & \xi_{1q} & \xi'_{1q} & \dots & \xi_{1q}^{(r_q)} & \eta_1 & \eta'_1 & \dots & \eta_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi'_{h1} & \dots & \xi_{h1}^{(r_1)} & \xi_{h2} & \xi'_{h2} & \dots & \xi_{h2}^{(r_2)} & \dots & \xi_{hq} & \xi'_{hq} & \dots & \xi_{hq}^{(r_q)} & \eta_h & \eta'_h & \dots & \eta_h^{(m)} \end{vmatrix}$$

Les coefficients de $X_s^{(m_s)}$ dans le déterminant (83) ont été désignés par α_{0s} ($s = 1, 2, \dots, q$) et le coefficient de $Y^{(r)}$ par $\mathfrak{A}$. Écrivons comme auparavant (pages 27, 61)

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \alpha'_{01} & \dots & \alpha_{01}^{(q-1)} \\ \alpha_{02} & \alpha'_{02} & \dots & \alpha_{02}^{(q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{0q} & \alpha'_{0q} & \dots & \alpha_{0q}^{(q-1)} \end{vmatrix}, \quad \gamma_{0s} = \frac{\partial \log \delta}{\partial \alpha_{0s}^{(q-1)}} \quad (s = 1, 2, \dots, q).$$

$$\delta = \pm a_1 a^{q-1},$$

$$\text{où } \alpha_1 = \begin{vmatrix} x_{11} & x'_{11} \dots x^{(m_1-1)}_{11} & x_{12} & x'_{12} \dots x^{(m_2-1)}_{12} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x^{(m_q-1)}_{1q} & y_1 & y'_1 \dots y^{(r_1+q-1)}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x^{(m_1-1)}_{h1} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x^{(m_2-1)}_{h2} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x^{(m_q-1)}_{hq} & y_h & y'_h \dots y^{(r_h+q-1)}_h \end{vmatrix},$$

$$\delta = \frac{1}{\begin{vmatrix} \alpha_{01} & \alpha'_{01} & \dots & \alpha^{(q-3)}_{01} \\ \alpha_{02} & \alpha'_{02} & \dots & \alpha^{(q-3)}_{02} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{0,q-2} & \alpha'_{0,q-2} & \dots & \alpha^{(q-3)}_{0,q-2} \end{vmatrix}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\begin{vmatrix} \alpha_{01} & \alpha'_{01} & \dots & \alpha^{(q-2)}_{01} \\ \alpha_{02} & \alpha'_{02} & \dots & \alpha^{(q-2)}_{02} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{0,q-2} & \alpha'_{0,q-2} & \dots & \alpha^{(q-2)}_{0,q-2} \end{vmatrix}} \right]$$
$$s = + \frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{11}^{(m_1-1)} & \dots & x_{1,s-1} \dots x_{1,s-1}^{(m_{s-1}-1)} & x_{1s} \dots x_{1s}^{(m_s)} & x_{1,s+1} \dots x_{1,s+1}^{(m_{s+1}-1)} & \dots & x_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q-1)} & y_1 \dots y_1^{r+q-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1-1)} & \dots & x_{h,s-1} \dots x_{h,s-1}^{(m_{s-1}-1)} & x_{hs} \dots x_{hs}^{(m_s)} & x_{h,s+1} \dots x_{h,s+1}^{(m_{s+1}-1)} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q-1)} & y_h \dots y_h^{r+q-2} \end{vmatrix} \\ (s = 1, 2, \dots, q)$$

Le signe étant sans importance à ce sujet, je ne l'écris pas.

Les coefficients de $X_s^{(r_s)}$ dans le déterminants (100) sont désignés par $\bar{\gamma}_{0s}$ ($s = 1, 2, \dots, q$) et le coefficient de $Y^{(m)}$ par $\mathfrak{B}_1$. Nous allons ainsi montrer que, dans le cas où les conditions (98) sont remplies, les fonctions γ_{0s} ($s = 1, 2, \dots, q$), multipliées par $\mathfrak{A}$, et les fonctions $\bar{\gamma}_{0s}$ ($s = 1, 2, \dots, q$), divisées par $\mathfrak{B}_1$, considérées comme fonctions de y , déterminent une même équation différentielle linéaire.

Supposons que les relations (98) aient lieu. De même que nous avons obtenu l'égalité (99), nous aurons aussi

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\mathfrak{B}_1 = +\mathfrak{A}_1.$$

Supposons pour un moment $r_1 \leq r_2 < \dots < r_q$; nous pouvons, sans diminuer la généralité, faire cette supposition, puisque nous n'avons pas supposé ici $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$. Écrivons

$$f_j(x) = (-1)^{r_1-1} \sum_{i=1}^h x_{i1}^{(m_i)} \xi_{ij}^{(r_j)} \quad (j = 2, 3, \dots, q).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \psi \begin{vmatrix} \xi_{11} \dots \xi_{11}^{(r_1-1)} & \xi_{12} \dots \xi_{12}^{(r_2-1)} & \xi_{12}^{(r_2)} + f_2(x)\xi_{11}^{(r_1)} & \xi_{13} \dots \xi_{13}^{(r_3-1)} & \xi_{13}^{(r_3)} + f_3(x)\xi_{11}^{(r_1)} & \dots & \xi_{1q} \dots \xi_{1q}^{(r_q-1)} & \xi_{1q}^{(r_q)} + f_q(x)\xi_{11}^{(r_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{t1} \dots \xi_{t2}^{(r_1-1)} & \xi_{t2} \dots \xi_{t2}^{(r_2-1)} & \xi_{t2}^{(r_2)} + f_2(x)\xi_{t1}^{(r_1)} & \xi_{t3} \dots \xi_{t3}^{(r_3-1)} & \xi_{t3}^{(r_3)} + f_3(x)\xi_{t1}^{(r_1)} & \dots & \xi_{tq} \dots \xi_{tq}^{(r_q-1)} & \xi_{tq}^{(r_q)} + f_q(x)\xi_{t1}^{(r_1)} \end{vmatrix} \\ = \pm \begin{vmatrix} x_{t+1,1} \dots x_{t+1,1}^{(m_1-1)} & x_{t+1,2} \dots x_{t+1,2}^{(m_2-1)} & x_{t+1,3} \dots x_{t+1,3}^{(m_3-1)} & \dots & x_{t+1,q} \dots x_{t+1,q}^{(m_q-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2-1)} & x_{h3} \dots x_{h3}^{(m_3-1)} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q-1)} \end{vmatrix}, \\ \left(t = \sum_{i=1}^q r_i + q - 1 \right) \end{aligned}$$

ce qui peut être vérifié, en effectuant la multiplication, colonne par colonne, et en tenant compte des relations

$$\sum_{i=1}^h x_{i1}^{(m_i)} (\xi_{ij}^{(r_j)} + f_j(x)\xi_{i1}^{(r_1)}) = 0 \quad (j = 2, 3, \dots, q).$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\mathfrak{D}_1 \begin{vmatrix} \xi_{11} \dots \xi_{11}^{(r_1-1)} & \xi_{12} \dots \xi_{12}^{(r_2-1)} & \xi_{12}^{(r_2)} + f_2(x)\xi_{11}^{(r_1)} & \dots & \xi_{1q} \dots \xi_{1q}^{(r_q-1)} & \xi_{1q}^{(r_q)} + f_q(x)\xi_{11}^{(r_1)} & \gamma_1 \dots \gamma_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{h1} \dots \xi_{h1}^{(r_1-1)} & \xi_{h2} \dots \xi_{h2}^{(r_2-1)} & \xi_{h2}^{(r_2)} + f_2(x)\xi_{h1}^{(r_1)} & \dots & \xi_{hq} \dots \xi_{hq}^{(r_q-1)} & \xi_{hq}^{(r_q)} + f_q(x)\xi_{h1}^{(r_1)} & \gamma_h \dots \gamma_h^{(m)} \end{vmatrix} \\ = \pm \begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{11}^{(m_1)} & x_{12} \dots x_{12}^{(m_2-1)} & \dots & x_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q-1)} & y_1 \dots y_1^{(r+q-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2-1)} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q-1)} & y_h \dots y_h^{(r+q-2)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons ainsi une relation de la forme

$$\frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1} (\pm \bar{\gamma}_{01} \pm f_2(x)\bar{\gamma}_{02} \pm \dots \pm f_q(x)\bar{\gamma}_{0q}) = \gamma_{01}.$$

Si nous écrivons

$$g_j(x) = (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^h x_{i2}^{(j)} \bar{s}_{ij}^{(j)}, \quad (j = 3, 4, \dots, q).$$

nous obtiendrons de la même manière une relation de la forme

$$\frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1} (\pm \bar{\gamma}_{02} \pm g_3(x) \bar{\gamma}_{03} \pm \dots \pm g_q(x) \bar{\gamma}_{0q}) = \gamma_{02}.$$

De même nous pourrons continuer; nous pourrons déterminer des fonctions

$f_{ij}(x)$ $\left(\begin{matrix} i = j+1, j+2, \dots, q \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right)$ d'une telle manière que nous ayons

$$\gamma_{0j} = \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1} \left(\pm \bar{\gamma}_{0j} + \sum_{i=j+1}^q f_{ij}(x) \bar{\gamma}_{0i} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, q).$$

Nous avons ainsi trouvé que, dans le cas où les relations (98) sont remplies, les fonctions α_{0s} ($s = 1, 2, \dots, q$), divisées par $\mathfrak{A}$, et les fonctions $\bar{\gamma}_{0s}$ ($s = 1, 2, \dots, q$), divisées par $\mathfrak{B}_1$, considérées comme fonctions de y , nous donnent deux équations différentielles linéaires, qui sont adjointes.

Supposons d'abord

$$r_1 = r_2 = \dots = r_q = 0,$$

et ainsi

$$r = 0.$$

Dans ce cas, le déterminant (83), divisé par $\mathfrak{A}$, est l'intégrale générale d'une équation

$$\sum_{i=0}^q \bar{A}_i \frac{\partial^{i+1} \bar{z}}{\partial x \partial y^i} = 0 \quad (\bar{A}_q = 1);$$

et le déterminant (100), divisé par $\mathfrak{B}_1$, est l'intégrale générale d'une équation

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=0}^q \bar{C}_i \frac{\partial^i \bar{u}}{\partial y^i} = 0 \quad (\bar{C}_q = 1).$$

Comme α_{0s} ($s = 1, 2, \dots, q$), divisées par $\mathfrak{A}$, sont q intégrales distinctes de l'équation

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z_0}{\partial y^i} = 0$$

et que $\bar{\gamma}_{0s}$ ($s = 1, 2, \dots, q$), divisées par $\mathfrak{B}_1$, sont q intégrales distinctes de l'équation

$$\sum_{i=0}^q \bar{C}_i \frac{\partial^i u_0}{\partial y^i} = 0,$$

il en suit que les deux équations

$$\sum_{i=0}^q \bar{A}_i \frac{\partial^{i+1} \bar{z}}{\partial x \partial y^i} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=0}^q \bar{C}_i \frac{\partial^i \bar{u}}{\partial y^i} = 0$$

sont adjointes, puisque les conditions (98) sont remplies.

Proposition 16. Si l'intégrale générale de l'équation (E) est

$$z = N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 \dots X_1^{(m_1)} & X_2 & X'_2 \dots X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X'_q \dots X_q^{(m_q)} & Y \\ x_{11} & x'_{11} \dots x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} \dots x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q)} & y_h \end{vmatrix},$$

$$\left(h = \sum_{i=1}^q m_i + q \right)$$

où y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) sont linéairement indépendantes, l'intégrale générale de l'équation (E') est

$$u = N \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \dots X_q & Y & Y' \dots Y^{(m)} \\ \xi_{11} & \xi_{12} \dots \xi_{1q} & \eta_1 & \eta'_1 \dots \eta_1^{(m_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi_{h2} \dots \xi_{hq} & \eta_h & \eta'_h \dots \eta_h^{(m_h)} \end{vmatrix} \quad \left(m = \sum_{i=1}^q m_i \right),$$

où

$$\eta_i = \frac{\partial \log \mathfrak{D}_1}{\partial y_i^{(h-1)}} \quad (i = 1, 2, \dots, h), \quad \mathfrak{D}_1 = \begin{vmatrix} y_1 & y'_1 \dots y_1^{(h-1)} \\ y_2 & y'_2 \dots y_2^{(h-1)} \\ \vdots & \vdots \\ y_h & y'_h \dots y_h^{(h-1)} \end{vmatrix},$$

$$\xi_{ij} = \frac{\partial \log \mathfrak{D}}{\partial x_{ij}^{(m_j)}} \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, h \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right),$$

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} x_{11} & x'_{11} \dots x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} \dots x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} \\ x_{21} & x'_{21} \dots x_{21}^{(m_1)} & x_{22} & x'_{22} \dots x_{22}^{(m_2)} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} \dots x_{2q}^{(m_q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q)} \end{vmatrix};$$

(E) et (E') désignant toutes les équations équivalentes, le facteur non essentiel N peut être choisi arbitrairement.

Si l' Y -intégrale de l'équation (20) est de rang supérieur à 1, il n'est pas aussi simple de déduire l'intégrale générale de l'équation adjointe (23) de l'intégrale générale de l'équation (20), donnée sous la forme (83). Lorsque l'équation (20) admet une Y -intégrale de rang $r + 1$ et q X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$ qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur, l'équation adjointe (23) admet (selon la proposition 10) une Y -intégrale de rang $\sum_{i=1}^q m_i + 1$ et q X -intégrales, et si ces X -intégrales sont écrites sous une telle forme

qu'elles ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur, la somme de leur rang est $r + q$. Pour déduire l'intégrale générale de l'équation (23) de l'intégrale générale de l'équation (20) donnée sous la forme (83), il nous faut savoir d'abord le rang des X -intégrales de l'équation (23) — il ne suffit pas de savoir que la somme de leur rang est $r + q$.

Supposons que, dans le déterminant (83), y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) soient linéairement indépendantes et qu'il n'existe pas une même relation de la forme (84') pour $j = 1, 2, \dots, q$. Et supposons $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$.

Nous avons déjà vu (page 126) que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (E') admette une X -intégrale de rang inférieur à $i + 1$ est que le coefficient de $Y^{(r-q_i)}$ dans le déterminant (96') soit nul. Pour abrégér, désignons les déterminants

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{h1} \\ x'_{11} & x'_{21} & \dots & x'_{h1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{11}^{(m_1+i)} & x_{21}^{(m_1+i)} & \dots & x_{h1}^{(m_1+i)} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{h2} \\ x'_{12} & x'_{22} & \dots & x'_{h2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{12}^{(m_2+j)} & x_{22}^{(m_2+j)} & \dots & x_{h2}^{(m_2+j)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1q} & x_{2q} & \dots & x_{hq} \\ x'_{1q} & x'_{2q} & \dots & x'_{hq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1q}^{(m_q+k)} & x_{2q}^{(m_q+k)} & \dots & x_{hq}^{(m_q+k)} \end{vmatrix}$$

par

$$\mathfrak{D}[m_1 + i, m_2 + j, \dots, m_q + k].$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le coefficient de $Y^{(r-q_i)}$ dans le déterminant (96') soit nul est que tous les déterminants

$$\mathfrak{D}[m_1 + i, m_2 + i, \dots, m_q + i],$$

qui sont d'ordre $\sum_{i=1}^q m_i + q(i + 1)$, soient nuls, puisque y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) sont linéairement indépendantes. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (23) n'admette pas de X -intégrale de rang inférieur à $p_1 + 1$ est ainsi que tous les déterminants

$$\mathfrak{D}[m_1 + p_1, m_2 + p_1, \dots, m_q + p_1]$$

ne soient pas nuls. Supposons que tous les déterminants

$$(101) \quad \mathfrak{D}[m_1 + p_1, \dots, m_{s_1-1} + p_1, m_{s_1} + p_1 + 1, \dots, m_q + p_1 + 1]$$

soient nuls, sans que tous les déterminants

$$(101') \quad \mathfrak{D} [m_1 + p_1, \dots, m_{s_1} + p_1, m_{s_1+1} + p_1 + 1, \dots, m_q + p_1 + 1]$$

soient nuls. Cette hypothèse exprime que $h_j(x)$ ($j = s_1 + 1, s_1 + 2, \dots, q$) peuvent être choisies d'une telle manière que tous les déterminants qui s'obtiennent en remplaçant, dans les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_1 + p_1, \dots, m_{s_1-1} + p_1, m_{s_1} + p_1 + 1, m_{s_1+1} + p_1, \dots, m_q + p_1],$$

x_{is_1} par $\bar{x}_{is_1}$, où

$$\bar{x}_{is_1} = x_{is_1} + \sum_{j=s_1+1}^q h_j(x) x_{ij}^{(m_j-m_{s_1})} \quad (i = 1, 2, \dots, h),$$

soient nuls. Nous pouvons en déduire que l'équation (23) admet une X -intégrale de rang $p_1 + 1$ qui correspond à

$$\gamma_{0s_1} + \sum_{j=s_1+1}^q h_j(x) \gamma_{0j};$$

on obtient ce résultat en appliquant la substitution

$$\bar{X}_{s_1} = X_{s_1} + \sum_{j=s_1+1}^q h_j(x) X_j^{(m_j-m_{s_1})}$$

et en tenant compte du résultat page 125. Comme tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_1 + p_1, m_2 + p_1, \dots, m_q + p_1]$$

ne sont pas nuls, l'équation (23) ne peut admettre de X -intégrale de rang inférieur à $p_1 + 1$. L'intégrale générale de l'équation (E_{-p_1}) est

$$N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(m_1+p_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(m_2+p_1)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(m_q+p_1)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r-p_1q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1+p_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2+p_1)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q+p_1)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(r-p_1q)} \end{vmatrix}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation adjointe (E'_{p_1}) , outre la X -intégrale de rang 1, n'admette pas de X -intégrale de rang inférieur à $i + 1$, est que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_1 + p_1 + i, \dots, m_q + p_1 + i]$$

ne soient pas nuls (ce n'est qu'en vue de plus de netteté que l'ordre des termes a été changé dans les déterminants). Supposons que tous les déterminants

$$(102) \quad \mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_1 + p_2, \dots, m_{s_2-1} + p_2, m_{s_2} + p_2 + 1, \dots, m_q + p_2 + 1]$$

soient nuls, sans que tous les déterminants

$$(102') \quad \mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_1 + p_2, \dots, m_{s_2} + p_2, m_{s_2+1} + p_2 + 1, \dots, m_q + p_2 + 1]$$

soient nuls; cette hypothèse exprime que $g_j(x)$ ($j = s_2 + 1, s_2 + 2, \dots, q$) peuvent

être choisies d'une telle manière que tous les déterminants qui s'obtiennent en remplaçant, dans les déterminants

$$\mathfrak{D}[m_{s_1} + p_1, m_1 + p_2, \dots, m_{s_2-1} + p_2, m_{s_2} + p_2 + 1, m_{s_2+1} + p_2, \dots, m_q + p_2],$$

x_{is_2} par

$$x_{is_2} + \sum_{j=s_2+1}^q g_j(x) x_{ij}^{m_j - m_{s_2}}, \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

soient nuls, et par suite l'équation (23) admet une X -intégrale de rang $p_2 + 1$ qui correspond à

$$\gamma_{0s_2} + \sum_{j=s_2+1}^q g_j(x) \gamma_{0j}.$$

Nous pourrions continuer de la même manière. Lorsque l'équation (23), outre les X -intégrales de rang $p_1 + 1, p_2 + 1$ correspondant à

$$\gamma_{0s_1} + \sum_{j=s_1+1}^q h_j(x) \gamma_{0j}, \quad \gamma_{0s_2} + \sum_{j=s_2+1}^q g_j(x) \gamma_{0j},$$

admet une X -intégrale de rang $p_3 + 1$, tous les déterminants

$$\mathfrak{D}[m_{s_1} + p_1, m_{s_2} + p_2, m_1 + p_3 + 1, \dots, m_q + p_3 + 1]$$

sont nuls etc. — Si nous continuons de cette manière, nous obtiendrons à la fin un déterminant

$$\mathfrak{D}[m_{s_1} + p_1, m_{s_2} + p_2, m_{s_3} + p_3, \dots, m_{s_q} + p_q]$$

d'ordre h qui n'est pas nul; nous avons

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_q, \quad \sum_{i=1}^q p_i = r.$$

Et l'équation (23) admet q X -intégrales de rang $p_1 + 1, p_2 + 1, \dots, p_q + 1$ qui ne peuvent être remplacées par des intégrales de rang inférieur. Écrivons

$$p_i = r_{s_i} \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad n_i = m_i + r_i \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad \sum_{i=1}^q m_i = m.$$

Le déterminant obtenu d'ordre h peut s'écrire

$$\mathfrak{D}[n_1, n_2, \dots, n_q];$$

pour abréger, ce déterminant est désigné par $\mathfrak{D}$, il est identique au déterminant $\mathfrak{D}$ page 127.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(n_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(n_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(n_q)} & Y \\ x_{11} & x'_{11} & \dots & x_{11}^{(n_1)} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x_{12}^{(n_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x_{1q}^{(n_q)} & y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(n_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(n_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(n_q)} & y_h \end{vmatrix}$$

est l'intégrale générale d'une équation qui peut être ramenée à l'équation (E) par r transformations (t_1) , convenablement choisies. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_q & Y & Y' & \dots & Y^{(h-q)} \\ \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1q} & \gamma_{11} & \gamma'_{11} & \dots & \gamma_{11}^{(h-q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi_{h2} & \dots & \xi_{hq} & \gamma_{h1} & \gamma'_{h1} & \dots & \gamma_{h1}^{(h-q)} \end{vmatrix}$$

où ξ_{ij} , γ_i ont été définies pages 127, 128, est par suite l'intégrale générale d'une équation qui peut être ramenée à l'équation (E') par r transformations (t_{-1}) , convenablement choisies. Nous allons maintenant montrer que le déterminant (100) nous donne l'intégrale générale de l'équation (E').

Nous voyons immédiatement que les déterminants

$$\begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(p_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(p_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(p_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(h-p_1-p_2-\dots-p_q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi'_{h1} & \dots & \xi_{h1}^{(p_1)} & \xi_{h2} & \xi'_{h2} & \dots & \xi_{h2}^{(p_2)} & \dots & \xi_{hq} & \xi'_{hq} & \dots & \xi_{hq}^{(p_q)} & \gamma_h & \gamma'_h & \dots & \gamma_h^{(h-p_1-p_2-\dots-p_q)} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(n_1-p_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(n_2-p_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(n_q-p_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(n_1+n_2+\dots+n_q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(n_1-p_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(n_2-p_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(n_q-p_q)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(n_1+n_2+\dots+n_q)} \end{vmatrix}$$

représentent l'intégrale générale de deux équations qui, à l'aide de la substitution $z = \lambda \bar{z}$, se ramènent à deux équations adjointes. Nous avons trouvé (pages 55, 56) que, si une transformation (t_j) qui diminue le rang des X -intégrales correspondant à α_{0i} ($i = 1, 2, \dots, j$) est appliquée à une équation de la forme (20) et si une transformation (t_{-j}) qui ne change pas le rang des X -intégrales correspondant à γ_{0i} ($i = j+1, j+2, \dots, q$) est appliquée à l'équation adjointe, nous obtenons deux équations qui, à l'aide de la substitution $z = \lambda \bar{z}$, se ramènent à deux équations adjointes; les fonctions γ_{0i} désignant toujours les adjointes des solutions α_{0i} . En s'appuyant sur ce résultat et sur le résultat page 130, on trouve qu'une condition suffisante pour que les déterminants

$$\begin{vmatrix} X_{s_1} & X'_{s_1} & \dots & X_{s_1}^{(p_1)} & X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(p_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(p_3)} & Y & Y' & \dots & Y^{(t)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{hs_1} & \xi'_{hs_1} & \dots & \xi_{hs_1}^{(p_1)} & \xi_{h1} & \xi'_{h1} & \dots & \xi_{h1}^{(p_2)} & \dots & \xi_{hq} & \xi'_{hq} & \dots & \xi_{hq}^{(p_3)} & \gamma_h & \gamma'_h & \dots & \gamma_h^{(t)} \end{vmatrix},$$

$$(t = h - q - p_1 - \dots - p_2(q-1))$$

$$\begin{vmatrix} X_{s_1} & X'_{s_1} & \dots & X_{s_1}^{(m_{s_1})} & X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(n_1-p_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(n_q-p_2)} & Y & Y' & \dots & Y^{(p_1+p_2(q-1))} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{hs_1} & x'_{hs_1} & \dots & x_{hs_1}^{(m_{s_1})} & x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(n_1-p_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(n_q-p_2)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(p_1+p_2(q-1))} \end{vmatrix}$$

(ce n'est qu'en vue de plus de netteté que l'ordre des colonnes a été changé) représentent l'intégrale générale de deux équations qui, à l'aide de la substitution $z = \lambda \bar{z}$, se ramènent à deux équations adjointes est

$$(103) \quad \sum_{i=1}^h x_{is_1} \xi_{il}^{(k)} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, m_{s_1} + p_2 - 1 \\ l = s_2, s_3, \dots, s_q \end{array} \right).$$

Nous avons supposé que tous les déterminants (101) soient nuls, sans que tous les déterminants (101') soient nuls; il résulte de ces hypothèses que les conditions (103) soient remplies. Nous pouvons continuer de la même manière. Nous avons supposé que tous les déterminants (102), soient nuls, sans que tous les déterminants (102') soient nuls; de ces suppositions et des suppositions précédentes nous pouvons déduire

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^h x_{is_1} \xi_{il}^{(k)} &= 0 & \left(\begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, m_{s_1} + p_3 - 1 \\ l = s_3, s_4, \dots, s_q \end{array} \right), \\ \sum_{i=1}^h x_{is_2} \xi_{il}^{(k)} &= 0 & \left(\begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, m_{s_2} + p_3 - 1 \\ l = s_3, s_4, \dots, s_q \end{array} \right). \end{aligned}$$

Il en résulte que les déterminants

$$\left| \begin{array}{cccccc} X_{s_1} \dots X_{s_1}^{(p_1)} & X_{s_2} \dots X_{s_2}^{(p_2)} & X_1 \dots X_1^{(p_3)} & \dots & X_q \dots X_q^{(p_q)} & Y \dots Y^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi_{hs_1} \dots \xi_{hs_1}^{(p_1)} & \xi_{hs_2} \dots \xi_{hs_2}^{(p_2)} & \xi_{h1} \dots \xi_{h1}^{(p_3)} & \dots & \xi_{hq} \dots \xi_{hq}^{(p_q)} & \eta_h \dots \eta_h^{(l)} \end{array} \right|$$

(l = h, q, p_1, p_2, p_3, ..., p_q - 2)

$$\left| \begin{array}{cccccc} X_{s_1} \dots X_{s_1}^{(m_{s_1})} & X_{s_2} \dots X_{s_2}^{(m_{s_2})} & X_1 \dots X_1^{(n_1 - p_3)} & \dots & X_q \dots X_q^{(n_q - p_3)} & Y \dots Y^{(p_1 + p_2 + p_3(q-2))} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{hs_1} \dots x_{hs_1}^{(m_{s_1})} & x_{hs_2} \dots x_{hs_2}^{(m_{s_2})} & x_{h1} \dots x_{h1}^{(n_1 - p_3)} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(n_q - p_3)} & y_h \dots y_h^{(p_1 + p_2 + p_3(q-2))} \end{array} \right|$$

déterminent deux équations qui, à l'aide de la substitution $z = \lambda \bar{z}$, se ramènent à deux équations adjointes. De cette façon, nous pourrions continuer de la manière dont a été obtenu le déterminant $\mathfrak{D}$, il résulte que nous avons

$$(104) \quad \sum_{i=1}^h x_{ij} \xi_{il}^{(k)} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, m_j + r_l - 1 \\ j = 1, 2, \dots, q; \quad l = 1, 2, \dots, q \end{array} \right),$$

et il en suit que le déterminant (100) nous donne l'intégrale générale de l'équation (E^v). L'intégrale générale de l'équation (23) est ainsi représentée par le déterminant (100), multiplié par un facteur; on obtient ce facteur d'une façon très simple, par exemple, en le déduisant du coefficient de $Y^{(m_j)}$.

Pour déduire l'intégrale générale de l'équation (E') de l'intégrale générale de l'équation (E) , donnée sous la forme (83), il fallait donc obtenir le déterminant $\mathfrak{D}$. Il faut remarquer que le déterminant $\mathfrak{D}$ n'est pas complètement déterminé. Si le déterminant (83) avait été écrite sous la forme

$$\begin{vmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_1' & \dots & \bar{X}_1^{(m_1)} & \bar{X}_2 & \bar{X}_2' & \dots & \bar{X}_2^{(m_2)} & \dots & \bar{X}_q & \bar{X}_q' & \dots & \bar{X}_q^{(m_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_{h1} & \tau_{h1}' & \dots & \tau_{h1}^{(m_1)} & \tau_{h2} & \tau_{h2}' & \dots & \tau_{h2}^{(m_2)} & \dots & \tau_{hq} & \tau_{hq}' & \dots & \tau_{hq}^{(m_q)} & y_h & y_h' & \dots & y_h^{(r)} \end{vmatrix},$$

où

$$\bar{X}_j = X_j + \sum_{l=j+1}^q \sum_{k=0}^{m_l - m_j} f_{jlk}(x) X_l^{(k)} \quad (j=1, 2, \dots, q),$$

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij} + \sum_{l=j+1}^q \sum_{k=0}^{m_l - m_j} f_{jlk}(x) x_{il}^{(k)} \quad \left(\begin{matrix} i=1, 2, \dots, h \\ j=1, 2, \dots, q \end{matrix} \right),$$

nous aurions, de règle, reçu un autre déterminant $\mathfrak{D}$ et d'autres valeurs pour $\xi_{ij} \left(\begin{matrix} i=1, 2, \dots, h \\ j=1, 2, \dots, q \end{matrix} \right)$. Cela n'est pas absurde, car si nous appliquons la substitution

$$X_{s_i} = \bar{X}_{s_i} + \sum_{j=i+1}^q \sum_{k=0}^{p_j - p_i} f_{ij k}(x) \bar{X}_{s_j}^{(k)} \quad (i=1, 2, \dots, q),$$

$$\xi_{ls_i} = \bar{\xi}_{ls_i} + \sum_{j=i+1}^q \sum_{k=0}^{p_j - p_i} f_{ij k}(x) \bar{\xi}_{ls_j}^{(k)} \quad \left(\begin{matrix} l=1, 2, \dots, h \\ i=1, 2, \dots, q \end{matrix} \right),$$

le déterminant (100) est remplacé par

$$\begin{vmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_1' & \dots & \bar{X}_1^{(r_1)} & \bar{X}_2 & \bar{X}_2' & \dots & \bar{X}_2^{(r_2)} & \dots & \bar{X}_q & \bar{X}_q' & \dots & \bar{X}_q^{(r_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{\xi}_{h1} & \bar{\xi}_{h1}' & \dots & \bar{\xi}_{h1}^{(r_1)} & \bar{\xi}_{h2} & \bar{\xi}_{h2}' & \dots & \bar{\xi}_{h2}^{(r_2)} & \dots & \bar{\xi}_{hq} & \bar{\xi}_{hq}' & \dots & \bar{\xi}_{hq}^{(r_q)} & \tau_{lh} & \tau_{lh}' & \dots & \tau_{lh}^{(m)} \end{vmatrix},$$

il en résulte que les quantités $\xi_{ij} \left(\begin{matrix} i=1, 2, \dots, h \\ j=1, 2, \dots, q \end{matrix} \right)$ ne sont pas complètement déterminées.

Les quantités ξ_{ij} ont été choisies d'une telle manière que les relations (97), (104) existent. Si nous effectuons la substitution

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij} + \sum_{l=j+1}^q \sum_{k=0}^{m_l - m_j} f_{jlk}(x) x_{il}^{(k)} \quad \left(\begin{matrix} i=1, 2, \dots, h \\ j=1, 2, \dots, q \end{matrix} \right),$$

où $f_{jlk}(x) = 0$ pour $k \geq m_l + r_l - m_j - r_j$, les relations (97) et (104) entre les fonctions x_{ij} , ξ_{ij} existent encore entre les fonctions $\bar{x}_{ij}$, ξ_{ij} . Puis les coefficients $f_{jlk}(x)$ peuvent être choisies d'une telle manière qu'existent aussi les relations

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^h x_{ij} \xi_{il}^{(k)} &= 0 & (k = 0, 1, \dots, n_l - 1) \\ \sum_{i=1}^h x_{ij} \xi_{il}^{(n_l)} &= 0 & (j \neq l) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (j = 1, 2, \dots, q) \\ (l = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

Il en résulte que l'intégrale générale de l'équation (E) s'obtient du déterminant (100) de la même manière que l'intégrale générale de l'équation (E') a été obtenu du déterminant (83), ce qui est tout naturel.

Proposition 17. Si l'intégrale générale de l'équation (E) est donnée sous la forme

$$N \left| \begin{array}{ccccccccc} X_1 & X'_1 \dots X_1^{(m_1)} & X_2 & X'_2 \dots X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X'_q \dots X_q^{(m_q)} & Y & Y' \dots Y^{(r)} \\ x_{11} & x'_{11} \dots x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} \dots x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y'_1 \dots y_1^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r)} \end{array} \right|,$$

$$\left(m = \sum_{i=1}^q m_i; \quad h = m + r + q; \quad m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q \right)$$

où y_i ($i = 1, 2, \dots, h$) sont linéairement indépendantes et où une même relation de la forme

$$\sum_{i=1}^h a_i x_{ij} = 0,$$

a_i étant des constantes, n'existe pas pour $j = 1, 2, \dots, q$, l'intégrale générale de l'équation (E') en pourra être obtenue. L'équation (E') admet, comme nous l'avons vu, une Y -intégrale de rang $m + 1$ et q X -intégrales distinctes, et si ces X -intégrales sont écrites sous une telle forme qu'elles ne puissent être remplacées par des intégrales de rang inférieur, la somme de leur rang est $r + q$. La condition nécessaire et suffisante pour que la X -intégrale du rang le moins élevé de l'équation (E') soit de rang $p_1 + 1$ est que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_1 + p_1 + 1, m_2 + p_1 + 1, \dots, m_q + p_1 + 1]$$

(en ce qui concerne cette notation, voir page 135) soient nuls, sans que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_1 + p_1, m_2 + p_1, \dots, m_q + p_1]$$

soient nuls. Supposons que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_1 + p_1, \dots, m_{s_1-1} + p_1, m_{s_1} + p_1 + 1, \dots, m_q + p_1 + 1]$$

soient nuls, sans que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_1 + p_1, \dots m_{s_1} + p_1, m_{s_1+1} + p_1 + 1, \dots m_q + p_1 + 1]$$

soient nuls. La condition nécessaire et suffisante pour que la X -intégrale de l'équation (E') du rang immédiatement supérieur à $p_1 + 1$ soit de rang $p_2 + 1$ est que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_1 + p_2 + 1, \dots m_q + p_2 + 1]$$

(ce n'est qu'en vue de plus de netteté que l'ordre des termes a été changé dans les déterminants) soient nuls, sans que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_1 + p_2, \dots m_q + p_2]$$

soient nuls. Supposons que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_1 + p_2, \dots m_{s_2-1} + p_2, m_{s_2} + p_2 + 1, \dots m_q + p_2 + 1]$$

soient nuls, sans que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_1 + p_2, \dots m_{s_2} + p_2, m_{s_2+1} + p_2 + 1, \dots m_q + p_2 + 1]$$

soient nuls. La condition nécessaire et suffisante pour que la X -intégrale de l'équation (E') du rang immédiatement supérieur à $p_2 + 1$ soit de rang $p_3 + 1$ est que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_{s_2} + p_2, m_{s_3} + p_3 + 1, \dots m_q + p_3 + 1]$$

soient nuls, sans que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_{s_2} + p_2, m_{s_3} + p_3, \dots m_q + p_3]$$

soient nuls. Etc. De cette manière, nous obtiendrons à la fin un déterminant d'ordre h qui n'est pas nul. Écrivons

$$p_i = r_{s_i} \quad (i = 1, 2, \dots q).$$

Le déterminant obtenu peut s'écrire

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} x_{11} & x'_{11} & \dots & x^{(m_1+r_1)}_{11} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x^{(m_2+r_2)}_{12} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x^{(m_q+r_q)}_{1q} \\ x'_{21} & x'_{21} & \dots & x^{(m_1+r_1)}_{21} & x_{22} & x'_{22} & \dots & x^{(m_2+r_2)}_{22} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} & \dots & x^{(m_q+r_q)}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x^{(m_1+r_1)}_{h1} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x^{(m_2+r_2)}_{h2} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x^{(m_q+r_q)}_{hq} \end{vmatrix}$$

L'intégrale générale de l'équation adjointe (E') est

$$N = \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X^{(r_1)}_1 & X_2 & X'_2 & \dots & X^{(r_2)}_2 & \dots & X_q & X'_q & \dots & X^{(r_q)}_q & Y & Y' & \dots & Y^{(m)} \\ \xi_{11} & \xi'_{11} & \dots & \xi^{(r_1)}_{11} & \xi_{12} & \xi'_{12} & \dots & \xi^{(r_2)}_{12} & \dots & \xi_{1q} & \xi'_{1q} & \dots & \xi^{(r_q)}_{1q} & \gamma_{11} & \gamma'_{11} & \dots & \gamma^{(m)}_{11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi'_{h1} & \dots & \xi^{(r_1)}_{h1} & \xi_{h2} & \xi'_{h2} & \dots & \xi^{(r_2)}_{h2} & \dots & \xi_{hq} & \xi'_{hq} & \dots & \xi^{(r_q)}_{hq} & \gamma_{h1} & \gamma'_{h1} & \dots & \gamma^{(m)}_{h1} \end{vmatrix},$$

où

$$\xi_{ij} = \frac{\partial \log \mathfrak{D}}{\partial x_{ij}^{(m_j + r_j)}}, \quad \eta_{ij} = \frac{\partial \log \mathfrak{D}_1}{\partial y_j^{(h-1)}}, \quad \mathfrak{D}_1 = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(h-1)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(h-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_h & y_h' & \dots & y_h^{(h-1)} \end{vmatrix};$$

(E) et (E') désignant toutes les équations équivalentes, le facteur non essentiel N peut être choisi arbitrairement.

IV.

Darboux¹⁾ a donné la forme la plus générale des équations (1) qui sont intégrables par la méthode de Laplace. Lorsque l'équation (1) admet une Y -intégrale de rang $r + 1$, l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + abz = 0,$$

où

$$a = -\frac{\partial}{\partial y} \log \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \dots & \frac{\partial^r \alpha}{\partial y^r} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{r+1} \alpha}{\partial x \partial y^r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^r \alpha}{\partial x^r} & \frac{\partial^{r+1} \alpha}{\partial x^r \partial y} & \dots & \frac{\partial^{2r} \alpha}{\partial x^r \partial y^r} \end{vmatrix}, \quad b = -\frac{\partial}{\partial x} \log \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \dots & \frac{\partial^{r-1} \alpha}{\partial y^{r-1}} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^r \alpha}{\partial x \partial y^{r-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{r-1} \alpha}{\partial x^{r-1}} & \frac{\partial^r \alpha}{\partial x^{r-1} \partial y} & \dots & \frac{\partial^{2r-1} \alpha}{\partial x^{r-1} \partial y^{r-1}} \end{vmatrix}.$$

et l'intégrale générale est

$$z = \begin{vmatrix} \theta & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \dots & \frac{\partial^r \theta}{\partial y^r} \\ \alpha & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \dots & \frac{\partial^r \alpha}{\partial y^r} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{r+1} \alpha}{\partial x \partial y^r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{r-1} \alpha}{\partial x^{r-1}} & \frac{\partial^r \alpha}{\partial x^{r-1} \partial y} & \dots & \frac{\partial^{2r-1} \alpha}{\partial x^{r-1} \partial y^{r-1}} \end{vmatrix},$$

θ étant l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

¹⁾ DARBOUX, Leçons. Partie II, Livre IV, chap. VI.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0$$

admette une X -intégrale de rang $m+1$ (l'équation (1) ainsi admettant une X -intégrale de rang $m+1-r$) est que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{m+1} \alpha}{\partial y^{m+1}} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{m+2} \alpha}{\partial x \partial y^{m+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^{m+1} \alpha}{\partial x^{m+1}} & \frac{\partial^{m+2} \alpha}{\partial x^{m+1} \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{2(m+1)} \alpha}{\partial x^{m+1} \partial y^{m+1}} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial^m \alpha}{\partial y^m} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{m+1} \alpha}{\partial x \partial y^m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^m \alpha}{\partial x^m} & \frac{\partial^{m+1} \alpha}{\partial x^m \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{2m} \alpha}{\partial x^m \partial y^m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nous allons essayer d'étendre ces résultats aux équations du type (20) qui admettent une Y -intégrale.

Nous savons que si l'équation (20) admet une Y -intégrale de rang $r+1$, l'équation peut se ramener, à l'aide de r transformations (t_{-1}), à une équation de même type et de même ordre qui admet une Y -intégrale de rang 1.

Nous partons maintenant d'une équation (20) qui admet une Y -intégrale de rang 1; l'équation peut s'écrire

$$(105) \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0.$$

Écrivons

$$F_m(z) \equiv \begin{vmatrix} z & \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^{m-1} \alpha_1}{\partial x^{m-1}} & \alpha_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^{m-1} \alpha_2}{\partial x^{m-1}} & \cdots & \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^{m-1} \alpha_q}{\partial x^{m-1}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^m \alpha_1}{\partial x^{m-1} \partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^m \alpha_2}{\partial x^{m-1} \partial y} & \cdots & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^m \alpha_q}{\partial x^{m-1} \partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^h z}{\partial y^h} & \frac{\partial^h \alpha_1}{\partial y^h} & \frac{\partial^{h+1} \alpha_1}{\partial x \partial y^h} & \cdots & \frac{\partial^{h+m-1} \alpha_1}{\partial x^{m-1} \partial y^h} & \frac{\partial^h \alpha_2}{\partial y^h} & \frac{\partial^{h+1} \alpha_2}{\partial x \partial y^h} & \cdots & \frac{\partial^{h+m-1} \alpha_2}{\partial x^{m-1} \partial y^h} & \cdots & \frac{\partial^h \alpha_q}{\partial y^h} & \frac{\partial^{h+1} \alpha_q}{\partial x \partial y^h} & \cdots & \frac{\partial^{h+m-1} \alpha_q}{\partial x^{m-1} \partial y^h} \end{vmatrix},$$

($h = mq$)

α_i ($i = 1, 2, \dots, q$) étant q intégrales distinctes de l'équation (33) ($\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$). D'après cette désignation, l'équation considérée s'écrit

$$F_1 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0.$$

En partant de l'intégrale générale de cette équation, on peut déduire directement l'intégrale générale de toutes les équations qui s'obtiennent, en appliquant la transformation (T_1); l'intégrale générale de l'équation (E_i) d'ordre n est

$$Z_i = N F_i(z),$$

où z est l'intégrale générale de l'équation (105); (E_i) désignant toutes les équations

¹⁾ Dans ce chapitre, j'écris, pour abréger, α_i au lieu de α_{0i} .

équivalentes, nous ajoutons toujours un facteur N qui peut être choisi arbitrairement. Cette proposition peut être démontrée de la manière suivante. Écrivons

$$(F_m)'_x(z) = \frac{\partial}{\partial x} F_m(z) - F_m \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

L'expression $F_m(z)$ peut, à un facteur près, qui est une fonction déterminée de x et de y , s'écrire

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} F_1(z) & F_1 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \right) & \dots & F_1 \left(\frac{\partial^{m-1} \alpha_1}{\partial x^{m-1}} \right) & \dots & F_1 \left(\frac{\partial \alpha_q}{\partial x} \right) & \dots & F_1 \left(\frac{\partial^{m-1} \alpha_q}{\partial x^{m-1}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} F_1(z) & \frac{\partial}{\partial y} F_1 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y} F_1 \left(\frac{\partial^{m-1} \alpha_1}{\partial x^{m-1}} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y} F_1 \left(\frac{\partial \alpha_q}{\partial x} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y} F_1 \left(\frac{\partial^{m-1} \alpha_q}{\partial x^{m-1}} \right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{h-q}}{\partial y^{h-q}} F_1(z) & \frac{\partial^{h-q}}{\partial y^{h-q}} F_1 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \right) & \dots & \frac{\partial^{h-q}}{\partial y^{h-q}} F_1 \left(\frac{\partial^{m-1} \alpha_1}{\partial x^{m-1}} \right) & \dots & \frac{\partial^{h-q}}{\partial y^{h-q}} F_1 \left(\frac{\partial \alpha_q}{\partial x} \right) & \dots & \frac{\partial^{h-q}}{\partial y^{h-q}} F_1 \left(\frac{\partial^{m-1} \alpha_q}{\partial x^{m-1}} \right) \end{array} \right|$$

($h = mq$)

et nous avons par suite

$$F_m \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0.$$

Nous avons

$$(F_m)'_x \left(\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} \right) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, q \\ j = 0, 1, \dots, m-2 \end{array} \right).$$

Écrivons

$$\Delta = \left| \begin{array}{cccc} F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_1}{\partial x^m} \right) & F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_2}{\partial x^m} \right) & \dots & F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_q}{\partial x^m} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_1}{\partial x^m} \right) & \frac{\partial}{\partial y} F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_2}{\partial x^m} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y} F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_q}{\partial x^m} \right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_1}{\partial x^m} \right) & \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_2}{\partial x^m} \right) & \dots & \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_q}{\partial x^m} \right) \end{array} \right|$$

et supposons $\Delta \neq 0$. Écrivons

$$\sum_{i=0}^q [A_i]_m \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \equiv \frac{(-1)^q}{\Delta} \left| \begin{array}{cccc} z & F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_1}{\partial x^m} \right) & F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_2}{\partial x^m} \right) & \dots & F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_q}{\partial x^m} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_1}{\partial x^m} \right) & \frac{\partial}{\partial y} F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_2}{\partial x^m} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y} F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_q}{\partial x^m} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^q z}{\partial y^q} & \frac{\partial^q}{\partial y^q} F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_1}{\partial x^m} \right) & \frac{\partial^q}{\partial y^q} F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_2}{\partial x^m} \right) & \dots & \frac{\partial^q}{\partial y^q} F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_q}{\partial x^m} \right) \end{array} \right|$$

Nous obtiendrons

$$\sum_{i=0}^q [A_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} (F_m)'_x \left(\frac{\partial^{m-1} \alpha_j}{\partial x^{m-1}} \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, q),$$

parce que

$$(F_m)'_x \left(\frac{\partial^{m-1} \alpha_j}{\partial x^{m-1}} \right) = - F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_j}{\partial x^m} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, q).$$

Comme $F_m \left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x} \right) = 0$, nous aurons

$$\sum_{i=0}^q [A_i]_m \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} F_m(z) = \sum_{i=0}^q [A_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} (F_m)'_x(z).$$

Comme

$$\sum_{i=0}^q [A_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} (F_m)'_x \left(\frac{\partial^k \alpha_j}{\partial x^k} \right) = 0 \quad \left(\begin{matrix} k = 0, 1, \dots, m-1 \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right),$$

il existe une identité de la forme

$$\sum_{i=0}^q [A_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} (F_m)'_x(z) + \sum_{i=0}^q [B_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} F_m(z) \equiv 0,$$

les coefficients $[B_i]_m$ ($i = 0, 1, \dots, q$) étant des fonctions de x et de y , et ainsi nous obtiendrons

$$\sum_{i=0}^q \left([A_i]_m \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + [B_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) F_m(z) = 0.$$

De la supposition $\Delta \neq 0$, nous pouvons déduire que $F_m(z)$ ne peut satisfaire à une équation du type (20) d'ordre inférieur à n . En effet, si $F_m(z)$ était l'intégrale d'une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{q-1} \left([\bar{A}_i]_m \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + [\bar{B}_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) Z_m = 0,$$

nous aurions

$$\sum_{i=0}^{q-1} \left([\bar{A}_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} (F_m)'_x(z) + [\bar{B}_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} F_m(z) \right) = 0,$$

et une condition nécessaire en est

$$\sum_{i=0}^{q-1} [\bar{A}_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} F_m \left(\frac{\partial^m \alpha_j}{\partial x^m} \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, q),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse $\Delta \neq 0$. $F_m(z)$ est ainsi l'intégrale générale de l'équation

$$\sum_{i=0}^q \left([A_i]_m \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + [B_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) Z_m = 0 \quad ([A_q]_m = 1).$$

Nous pouvons définir un facteur M , fonction de x et de y , de telle manière que l'identité

$$M \sum_{i=0}^q [A_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} F_m(z) \equiv F_{m+1}(z)$$

ait lieu. Par conséquent, si $N F_m(z)$ est l'intégrale générale de l'équation (E_m) , $N F_{m+1}(z)$ est l'intégrale générale de l'équation (E_{m+1}) . Nous voyons directement que l'intégrale générale de l'équation (E_1) est $N F_1(z)$. Par suite, $N F_{i+1}(z)$ est l'intégrale générale de l'équation (E_{i+1}) , à condition que l'on ait

$$(106) \quad \begin{vmatrix} F_i \left(\frac{\partial^i \alpha_1}{\partial x^i} \right) & F_i \left(\frac{\partial^i \alpha_2}{\partial x^i} \right) & \cdots & F_i \left(\frac{\partial^i \alpha_q}{\partial x^i} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} F_i \left(\frac{\partial^i \alpha_1}{\partial x^i} \right) & \frac{\partial}{\partial y} F_i \left(\frac{\partial^i \alpha_2}{\partial x^i} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial y} F_i \left(\frac{\partial^i \alpha_q}{\partial x^i} \right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} F_i \left(\frac{\partial^i \alpha_1}{\partial x^i} \right) & \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} F_i \left(\frac{\partial^i \alpha_2}{\partial x^i} \right) & \cdots & \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} F_i \left(\frac{\partial^i \alpha_q}{\partial x^i} \right) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Supposons que $i = m + 1$ soit la valeur la plus petite de i pour laquelle le déterminant (106) soit nul. Il en résulte qu'il existe entre $\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j}$ ($j = 0, 1, \dots, m + 1$) ($i = 1, 2, \dots, q$) une relation linéaire et homogène, les coefficients étant des fonctions de x . Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une telle relation entre $\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j}$ ($j = 0, 1, \dots, m + 1$) ($i = 1, 2, \dots, q$). Que la relation en question soit

$$(107) \quad \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} \left(\alpha_1 + \sum_{i=2}^q f_i(x) \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^m g_{ij}(x) \frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j}.$$

Écrivons

$$\sum_{i=0}^{q-1} [A_i]_{m+1} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \equiv \frac{(-1)^{q-1}}{D} \begin{vmatrix} z & F_{m+1} \left(\frac{\partial^{m+1} \alpha_2}{\partial x^{m+1}} \right) & \cdots & F_{m+1} \left(\frac{\partial^{m+1} \alpha_q}{\partial x^{m+1}} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} F_{m+1} \left(\frac{\partial^{m+1} \alpha_2}{\partial x^{m+1}} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial y} F_{m+1} \left(\frac{\partial^{m+1} \alpha_q}{\partial x^{m+1}} \right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{q-1} z}{\partial y^{q-1}} & \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} F_{m+1} \left(\frac{\partial^{m+1} \alpha_2}{\partial x^{m+1}} \right) & \cdots & \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} F_{m+1} \left(\frac{\partial^{m+1} \alpha_q}{\partial x^{m+1}} \right) \end{vmatrix},$$

où

$$D = \begin{vmatrix} F_{m+1} \left(\frac{\partial^{m+1} \alpha_2}{\partial x^{m+1}} \right) & F_{m+1} \left(\frac{\partial^{m+1} \alpha_3}{\partial x^{m+1}} \right) & \cdots & F_{m+1} \left(\frac{\partial^{m+1} \alpha_q}{\partial x^{m+1}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} F_{m+1} \left(\frac{\partial^{m+1} \alpha_2}{\partial x^{m+1}} \right) & \frac{\partial}{\partial y} F_{m+1} \left(\frac{\partial^{m+1} \alpha_3}{\partial x^{m+1}} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial y} F_{m+1} \left(\frac{\partial^{m+1} \alpha_q}{\partial x^{m+1}} \right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{q-2}}{\partial y^{q-2}} F_{m+1} \left(\frac{\partial^{m+1} \alpha_2}{\partial x^{m+1}} \right) & \frac{\partial^{q-2}}{\partial y^{q-2}} F_{m+1} \left(\frac{\partial^{m+1} \alpha_3}{\partial x^{m+1}} \right) & \cdots & \frac{\partial^{q-2}}{\partial y^{q-2}} F_{m+1} \left(\frac{\partial^{m+1} \alpha_q}{\partial x^{m+1}} \right) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nous obtiendrons

$$\sum_{i=0}^{q-1} [A_i]_{m+1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} (F_{m+1})'_x \left(\frac{\partial^k \alpha_i}{\partial x^k} \right) = 0 \quad \left(\begin{matrix} k = 0, 1, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right),$$

et une identité de la forme

$$\sum_{i=0}^{q-1} [A_i]_{m+1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} (F_{m+1})'_x(z) + \sum_{i=0}^{q-1} [B_i]_{m+1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} F_{m+1}(z) \equiv 0$$

existe ainsi. Comme $D \neq 0$, il en suit que $F_{m+1}(z)$ ne peut être l'intégrale d'une équation du type (20) d'ordre inférieur à $n-1$. Il en résulte que l'équation (E_{m+1}) peut s'écrire

$$\sum_{i=0}^{q-1} \left([A_i]_{m+1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + [B_i]_{m+1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) Z_{m+1} = 0,$$

et ainsi l'équation (E_{m+1}) est d'ordre $n-1$. Comme le déterminant (106) sera nul pour $i = m+1$, l'expression $F_{m+2}(z)$ est identiquement nul. Il suit des valeurs des coefficients $[A_i]_{m+1}$ que l'intégrale générale de l'équation (E_{m+2}) est

$$(108) \quad N \begin{vmatrix} z & \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \dots \frac{\partial^m \alpha_1}{\partial x^m} & \alpha_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \dots \frac{\partial^h \alpha_2}{\partial x^h} & \dots & \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial x} \dots \frac{\partial^h \alpha_q}{\partial x^h} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial y} \dots \frac{\partial^{m+1} \alpha_1}{\partial x^m \partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x \partial y} \dots \frac{\partial^{h+1} \alpha_2}{\partial x^h \partial y} & \dots & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial x \partial y} \dots \frac{\partial^{h+1} \alpha_q}{\partial x^h \partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^k z}{\partial y^k} & \frac{\partial^k \alpha_1}{\partial y^k} & \frac{\partial^{k+1} \alpha_1}{\partial x \partial y^k} \dots \frac{\partial^{m+k} \alpha_1}{\partial x^m \partial y^k} & \frac{\partial^k \alpha_2}{\partial y^k} & \frac{\partial^{k+1} \alpha_2}{\partial x \partial y^k} \dots \frac{\partial^{h+k} \alpha_2}{\partial x^h \partial y^k} & \dots & \frac{\partial^k \alpha_q}{\partial y^k} & \frac{\partial^{k+1} \alpha_q}{\partial x \partial y^k} \dots \frac{\partial^{h+k} \alpha_q}{\partial x^h \partial y^k} \end{vmatrix}$$

$$(k = (h+1)(q-1) + m+1)$$

où il faut substituer $h = m+1$. En général, nous trouverons que l'intégrale générale de l'équation (E_{h+1}) , $h > m$, est donnée par le déterminant (108), pourvu que ce déterminant ne soit pas identiquement nul, et il n'est identiquement nul que si l'équation (E_h) est d'ordre inférieur à $n-1$. De cette manière, nous pourrions continuer. — Nous sommes partis de ce qu'il n'existe entre $\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} \left(\begin{matrix} j = 0, 1, \dots, m+1 \\ i = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right)$ qu'une relation linéaire et homogène, les coefficients étant des fonctions de x . Si nous supposons que s relations distinctes de ce type existent entre $\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} \left(\begin{matrix} j = 0, 1, \dots, m+1 \\ i = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right)$, nous trouverons de la même manière que l'intégrale générale de l'équation (E_{m+1}) est $NF_{m+1}(z)$, et que l'équation (E_{m+1}) est d'ordre $n-s$.

Il résulte directement de ce qui précède que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (105) admette une X -intégrale de rang inférieur à $m+2$, ou autrement dit que l'équation (E_{m+1}) soit d'ordre inférieur à n , est que le déterminant (106) soit nul pour $i = m+1$. Supposons de nouveau que $i = m+1$ soit la valeur

la plus petite de i pour laquelle le déterminant (106) soit nul, et supposons que la relation entre $\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, q \\ j = 0, 1, \dots, m+1 \end{matrix} \right)$ soit la relation (107). Il en résulte que l'équation (105) admet une X -intégrale de rang $m+1$, correspondant à $\alpha_1 + \sum_{i=2}^q f_i(x) \alpha_i$, et que l'équation n'admet pas de X -intégrale de rang inférieur. De ce qui précède, il résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (105) admette encore une X -intégrale de rang inférieur à $\bar{m}+2$, où $\bar{m} \geq m$, est qu'il existe entre

$$\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} \quad \left(\begin{matrix} j = 0, 1, \dots, \bar{m}+1 \\ i = 2, 3, \dots, q \end{matrix} \right), \quad \frac{\partial^j \alpha_1}{\partial x^j} \quad (j = 0, 1, \dots, m)$$

une relation linéaire et homogène, les coefficients étant des fonctions de x . Nous pourrions continuer de cette manière. A l'aide des valeurs de α_i ($i = 1, 2, \dots, q$) nous pouvons reconnaître si l'équation (105) admet des X -intégrales et, dans ce cas, décider quel est le rang de cette X -intégrale ou de ces X -intégrales.

De ce qui précède, nous pouvons déduire que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (105) admette q X -intégrales distinctes de rang $m_1+1, m_2+1, \dots, m_q+1$, où $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$, correspondant à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$, qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur est qu'il existe des relations

$$\frac{\partial^{m_i+1} \alpha_i}{\partial x^{m_i+1}} = \sum_{k=1}^q \sum_{j=0}^{m_i} f_{kji}(x) \frac{\partial^j \alpha_k}{\partial x^j} \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

sans qu'il y ait des relations de la forme

$$\sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^{m_1} g_{ij}(x) \frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} = 0, \quad \sum_{i=2}^q \sum_{j=0}^{m_2} h_{ij}(x) \frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} + \sum_{j=0}^{m_1} k_j(x) \frac{\partial^j \alpha_1}{\partial x^j} = 0$$

etc. Faisons cette supposition. Écrivons $\sum_{i=1}^q m_i = m$. Les $m+q$ quantités

$\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} \left(\begin{matrix} j = 0, 1, \dots, m_i \\ i = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right)$ déterminent une équation de la forme

$$(109) \quad \sum_{i=0}^{m+q} f_i(y) \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0 \quad (f_{m+q}(y) = 1).$$

— Supposons, inversement, que α_i ($i = 1, 2, \dots, q$) satisfassent à une équation de la forme (109). Toutes les quantités $\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, q \\ j \geq 0 \end{matrix} \right)$ sont des intégrales de cette équation, et par suite, si nous considérons $\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, q \\ j \geq 0 \end{matrix} \right)$ comme fonctions de y , au plus $m+q$ de celles-ci peuvent être linéairement indépendantes. Il en

résulte que l'équation (105) admet q X -intégrales distinctes qui peuvent s'écrire de telle manière que la somme de leur rang soit $m + q$ au plus.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (105) admette q X -intégrales distinctes qui puissent s'écrire de telle manière que la somme de leur rang soit $m + q$ au plus est ainsi que toutes les intégrales de l'équation (33)

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$$

soient des intégrales d'une même équation de la forme (109). Nous pouvons aussi dire que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=0}^q (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial y^i} (A_i u) = 0$$

admette une Y -intégrale de rang $m + 1$ est que toutes les intégrales de l'équation (33) satisfassent à une équation du type (109) d'ordre $m + q$, et qu'elles ne satisfassent pas à une équation du même type, mais d'ordre moindre ¹⁾. — Il résulte de la proposition 15 du chapitre précédent que si l'équation (105) admet q X -intégrales de rang $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$ qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur, l'intégrale générale pourra s'écrire

$$z = \frac{1}{\mathfrak{D}} \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(m_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(m_q)} & Y \\ x_{11} & x'_{11} & \dots & x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x_{1q}^{(m_q)} & y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q)} & y_h \end{vmatrix} \begin{pmatrix} h = m + q \\ m = \sum_{i=1}^q m_i \end{pmatrix},$$

y_i ($i = 1, 2 \dots h$) étant linéairement indépendantes et $\mathfrak{D}$ étant le coefficient de Y dans le déterminant. Il en résulte que toutes les intégrales de l'équation (33) satisfassent à l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \dots & \frac{\partial^{m+q} \alpha}{\partial y^{m+q}} \\ y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(m+q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_h & y'_h & \dots & y_h^{(m+q)} \end{vmatrix} = 0 \quad (h = m + q),$$

et qu'elles ne satisfassent pas à une équation semblable, mais d'ordre moindre. Ce résultat est identique à celui que nous venons d'obtenir. Réciproquement, nous pourrions déduire la proposition 15, pour le cas où $r = 0$, du résultat que nous avons obtenu ici. Nous voyons aisément que les deux résultats peuvent se déduire l'un de l'autre.

¹⁾ Comparer Darboux, Leçons. Partie II, page 42.

Écrivons

$$G(z) \equiv \begin{vmatrix} z & \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^{r_1-1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1}} & \alpha_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^{r_2-1} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1}} & \cdots & \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^{r_q-1} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{r_1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1} \partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1} \partial y} & \cdots & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1} \partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^r z}{\partial y^r} & \frac{\partial^r \alpha_1}{\partial y^r} & \frac{\partial^{r+1} \alpha_1}{\partial x \partial y^r} & \cdots & \frac{\partial^{r+r_1-1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1} \partial y^r} & \frac{\partial^r \alpha_2}{\partial y^r} & \frac{\partial^{r+1} \alpha_2}{\partial x \partial y^r} & \cdots & \frac{\partial^{r+r_2-1} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1} \partial y^r} & \cdots & \frac{\partial^r \alpha_q}{\partial y^r} & \frac{\partial^{r+1} \alpha_q}{\partial x \partial y^r} & \cdots & \frac{\partial^{r+r_q-1} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1} \partial y^r} \end{vmatrix}$$

$$(r = \sum_{i=1}^q r_i)$$

Nous allons montrer que $G(z)$ divisé par le coefficient de $\frac{\partial^r z}{\partial y^r}$, z étant toujours l'intégrale générale de l'équation (105) et α_i ($i = 1, 2, \dots, q$) étant q intégrales distinctes de l'équation (33), est l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre n au plus, laquelle on obtient de l'équation (105) en appliquant r transformations (t_i) convenablement choisies. Écrivons

$$G'_x(z) \equiv \frac{\partial}{\partial x} G(z) - G\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

— Supposons $r_i \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, q$). De l'équation (105) nous obtiendrons $G\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$. La condition nécessaire et suffisante pour que $G(z)$ satisfasse à une équation

$$(110) \quad \sum_{i=0}^q \left(A_{ir} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_{ir} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_r = 0 \quad (A_{qr} = 1)$$

est que l'identité

$$\sum_{i=0}^q A_{ir} \frac{\partial^i}{\partial y^i} G'_x(z) + \sum_{i=0}^q B_{ir} \frac{\partial^i}{\partial y^i} G(z) \equiv 0$$

existe. Nous avons

$$G'_x \left(\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} \right) = 0 \quad \begin{pmatrix} j = 0, 1, \dots, r_i - 2 \\ i = 1, 2, \dots, q \end{pmatrix}$$

Comme

$$G'_x \left(\frac{\partial^{r_i-1} \alpha_i}{\partial x^{r_i-1}} \right) + G \left(\frac{\partial^{r_i} \alpha_i}{\partial x^{r_i}} \right) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

il résulte des conditions

$$\sum_{i=0}^q A_{ir} \frac{\partial^i}{\partial y^i} G'_x \left(\frac{\partial^{r_h-1} \alpha_h}{\partial x^{r_h-1}} \right) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, q)$$

que les coefficients A_{ir} doivent être choisis d'une manière qui résulte de l'identité suivante

$$(111) \quad \sum_{i=0}^q A_{ir} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \equiv \frac{(-1)^q}{\Delta} \begin{vmatrix} z & G\left(\frac{\partial^{r_1} \alpha_1}{\partial x^{r_1}}\right) & G\left(\frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2}}\right) & \dots & G\left(\frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q}}\right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} G\left(\frac{\partial^{r_1} \alpha_1}{\partial x^{r_1}}\right) & \frac{\partial}{\partial y} G\left(\frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2}}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y} G\left(\frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q}}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^q z}{\partial y^q} & \frac{\partial^q}{\partial y^q} G\left(\frac{\partial^{r_1} \alpha_1}{\partial x^{r_1}}\right) & \frac{\partial^q}{\partial y^q} G\left(\frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2}}\right) & \dots & \frac{\partial^q}{\partial y^q} G\left(\frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q}}\right) \end{vmatrix},$$

$$\text{où } \Delta = \begin{vmatrix} G\left(\frac{\partial^{r_1} \alpha_1}{\partial x^{r_1}}\right) & G\left(\frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2}}\right) & \dots & G\left(\frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y} G\left(\frac{\partial^{r_1} \alpha_1}{\partial x^{r_1}}\right) & \frac{\partial}{\partial y} G\left(\frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2}}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y} G\left(\frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q}}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} G\left(\frac{\partial^{r_1} \alpha_1}{\partial x^{r_1}}\right) & \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} G\left(\frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2}}\right) & \dots & \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} G\left(\frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q}}\right) \end{vmatrix};$$

nous sommes partis de la supposition $\Delta \neq 0$. Les coefficients B_{ir} ($i = 0, 1, \dots, q$) sont définis par les q conditions

$$(111') \quad \sum_{i=0}^q A_{ir} \frac{\partial^i}{\partial y^i} G_x \left(\frac{\partial^{r_h} \alpha_h}{\partial x^{r_h}} \right) + \sum_{i=0}^q B_{ir} \frac{\partial^i}{\partial y^i} G \left(\frac{\partial^{r_h} \alpha_h}{\partial x^{r_h}} \right) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, q)$$

et par la condition

$$(111'') \quad B_{qr} = - \frac{\partial \log D}{\partial x},$$

où D est le coefficient de $\frac{\partial^r z}{\partial y^r}$ dans l'expression $G(z)$. De la supposition $\Delta \neq 0$, il résulte que $G(z)$ ne peut être l'intégrale d'une équation du type (20) d'ordre inférieur à n , et $G(z)$ est ainsi l'intégrale générale de l'équation (110) où les coefficients sont définis par les relations (111), (111'), (111''). — Si nous supposons $\Delta = 0$ et si nous supposons qu'il existe s , et pas plus de s , relations distinctes de la forme

$$\sum_{i=1}^q f_i(x) G \left(\frac{\partial^{r_i} \alpha_i}{\partial x^{r_i}} \right) = 0.$$

nous trouverons également que $G(z)$ sera l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre $n - s$. — L'expression $G(z)$ peut s'écrire

$$G(z) = M \frac{\partial}{\partial y} \frac{g(z)}{g \left(\frac{\partial^{r_1-1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1}} \right)},$$

où

$$g(z) \equiv \begin{vmatrix} z & \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^{r_1-2} \alpha_1}{\partial x^{r_1-2}} & \alpha_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^{r_2-1} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1}} & \cdots & \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^{r_q-1} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{r_1-1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-2} \partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1} \partial y} & \cdots & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1} \partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{r-1} z}{\partial y^{r-1}} & \frac{\partial^{r-1} \alpha_1}{\partial y^{r-1}} & \frac{\partial^r \alpha_1}{\partial x \partial y^{r-1}} & \cdots & \frac{\partial^{r_1+r-3} \alpha_1}{\partial x^{r_1-2} \partial y^{r-1}} & \frac{\partial^{r-1} \alpha_2}{\partial y^{r-1}} & \frac{\partial^r \alpha_2}{\partial x \partial y^{r-1}} & \cdots & \frac{\partial^{r_2+r-2} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1} \partial y^{r-1}} & \cdots & \frac{\partial^{r-1} \alpha_q}{\partial y^{r-1}} & \frac{\partial^r \alpha_q}{\partial x \partial y^{r-1}} & \cdots & \frac{\partial^{r_q+r-2} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1} \partial y^{r-1}} \end{vmatrix}$$

$$\left(r = \sum_{i=1}^q r_i \right)$$

et M une fonction déterminée de x et de y . La transformation

$$z_r = g \left(\frac{\partial^{r_1-1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_{r-1}}{g \left(\frac{\partial^{r_1-1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1}} \right)}$$

est ainsi une transformation (t_1) de l'équation dont l'intégrale générale est $z_{r-1} = g(z)$.

Il en résulte que $G(z)$ divisé par le coefficient de $\frac{\partial^r z}{\partial y^r}$ est l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre n au plus, qui peut se déduire de l'équation (105) à l'aide de r transformations (t_i) . — Nous avons supposé $r_i \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, q$). Mais si nous supposons $r_1 = r_2 = \dots = r_s = 0$, nous obtiendrons le même résultat.

Supposons $\Delta \neq 0$. $G(z)$ est l'intégrale générale de l'équation (110) où les coefficients A_{ir} et B_{ir} remplissent les conditions (111), (111') et (111''). Posons $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_q$. En regardant la transformation $z_r = G(z)$ comme composée de r_1 transformations (t_q) , $r_2 - r_1$ transformations (t_{q-1}) , $\dots$, $r_q - r_{q-1}$ transformations (t_1) , l'on trouve que l'équation adjointe

$$(112) \quad \sum_{i=0}^q (-1)^i \left[\frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_{ir} u_{-r}) - \frac{\partial^i}{\partial y^i} (B_{ir} u_{-r}) \right] = 0$$

admet q X -intégrales distinctes de rang $r_1 + 1, r_2 + 1, \dots, r_q + 1$ qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur. Chaque équation de la forme (110) où les coefficients A_{ir} et B_{ir} remplissent les conditions (111), (111') et (111'') admet ainsi une Y -intégrale de rang $\sum_{i=1}^q r_i + 1$, et l'équation adjointe admet q X -intégrales distinctes de rang $r_1 + 1, r_2 + 1, \dots, r_q + 1$.

Réciproquement, nous pourrions montrer que l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre n qui admet une Y -intégrale de rang $r + 1$ et dont l'équation adjointe admet q X -intégrales distinctes de rang $r_1 + 1, r_2 + 1, \dots, r_q + 1$, où $\sum_{i=1}^q r_i = r$, peut toujours s'écrire sous la forme

$$z_r = MG(z),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$, M étant des fonctions de x et de y , et z étant l'intégrale générale de l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} & \dots & \frac{\partial^{q+1} z}{\partial x \partial y^q} \\ \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial^q \alpha_1}{\partial y^q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial^q \alpha_q}{\partial y^q} \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons que l'équation proposée soit (110), les coefficients A_{ir} et B_{ir} étant des fonctions de x et de y . Supposons $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_q$. A l'aide de $r_q - r_{q-1}$ transformations (t_1) , $r_{q-1} - r_{q-2}$ transformations (t_2) , $\dots$, r_1 transformations (t_q) , l'équation adjointe (112) peut se ramener à une équation du type (20) d'ordre n qui admet q X -intégrales distinctes de rang 1. L'adjointe de l'équation obtenue peut ainsi, à l'aide de la substitution $z = \lambda \bar{z}$, se mettre sous la forme (105). De la manière dont l'équation

$$\sum_{i=0}^q (-1)^i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x^i \partial y^i} (A_i u) = 0$$

a été déduite de l'équation (112), il résulte que les intégrales α_i ($i = 1, 2, \dots, q$) de l'équation $\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0$ peuvent toujours être choisies d'une telle manière que l'équation (110) s'obtienne de l'équation (105) par la transformation $z_r = MG(z)$, où M est une fonction déterminée de x et de y .

Par cela est donnée la forme générale de l'intégrale générale des équations (20) qui admettent une Y -intégrale. Je n'ai pas réussi à donner la forme générale de l'intégrale générale des équations (20) qui admettent q X -intégrales distinctes, et, par conséquent, je n'ai pas réussi non plus à déduire, de l'intégrale générale $z_r = G(z)$ de l'équation (110), l'intégrale générale de l'équation adjointe.

Proposition 18. L'intégrale générale des équations (20) qui admettent une Y -intégrale est donnée par la formule

$$z = M \begin{vmatrix} \theta & \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial^{r_1-1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1}} & \alpha_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial^{r_2-1} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1}} & \dots & \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial x} & \dots & \frac{\partial^{r_q-1} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{r_1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1} \partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1} \partial y} & \dots & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1} \partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^r \theta}{\partial y^r} & \frac{\partial^r \alpha_1}{\partial y^r} & \frac{\partial^{r+1} \alpha_1}{\partial x \partial y^r} & \dots & \frac{\partial^{r+r_1-1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1} \partial y^r} & \frac{\partial^r \alpha_2}{\partial y^r} & \frac{\partial^{r+1} \alpha_2}{\partial x \partial y^r} & \dots & \frac{\partial^{r+r_2-1} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1} \partial y^r} & \dots & \frac{\partial^r \alpha_q}{\partial y^r} & \frac{\partial^{r+1} \alpha_q}{\partial x \partial y^r} & \dots & \frac{\partial^{r+r_q-1} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1} \partial y^r} \end{vmatrix} = G(\theta);$$

$r = \sum_{i=1}^q r_i$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$, M étant des fonctions déterminées de x et de y ; θ étant l'intégrale générale de l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} & \dots & \frac{\partial^{q+1} \theta}{\partial x \partial y^q} \\ \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial^q \alpha_1}{\partial y^q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial^q \alpha_q}{\partial y^q} \end{vmatrix} = 0.$$

Inversement, chaque expression $G(\theta)$ où θ est définie de cette manière représente l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre n au plus. Lorsque s , et pas plus de s , relations distinctes de la forme

$$\sum_{i=1}^q f_i(x) G\left(\frac{\partial^{r_i} \alpha_i}{\partial x^{r_i}}\right) = 0$$

existent, $G(\theta)$ est l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre $n - s$. — A l'aide des valeurs de α_i ($i = 1, 2, \dots, q$), nous pouvons reconnaître si l'équation qui définit θ admet des X -intégrales et, dans ce cas, décider le rang de cette X -intégrale ou de ces X -intégrales. La condition nécessaire et suffisante pour que l'adjointe de l'équation en θ admette une Y -intégrale de rang $m + 1$ est que toutes les α_i ($i = 1, 2, \dots, q$) satisfassent à une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{q+m} f_i(y) \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0 \quad (f_{q+m}(y) = 1)$$

et qu'elles ne satisfassent pas à une équation du même type, mais d'ordre moindre.

A l'aide des résultats obtenus dans ce chapitre, nous pouvons directement déduire une partie de ceux obtenus dans le chapitre précédent; l'équation traitée dans ce chapitre-là étant un cas spécial de l'équation traitée dans celui-ci. Nous avons déjà vu (page 151) que la proposition 15, pour le cas où $r = 0$, peut être déduite des résultats que nous avons obtenus ici, et ensuite, il est très facile de déduire la proposition 15 aussi pour le cas où $r > 0$.

V.

Dans les chapitres précédents, nous sommes partis de l'équation (20). L'équation

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{1i} \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n A_{0i} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0 \quad (A_{1, n-1} = 1)$$

peut, par un changement de variables indépendantes, se mettre sous la forme (20). Maintenant nous allons succinctement étudier comment la méthode de Laplace s'applique à l'équation

$$\sum_{i=0}^n A_{1i} \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n A_{0i} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0 \quad (A_{1, n-1} = 0; A_{0n} \neq 0).$$

Cette équation je l'écris (26)

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0 \quad (A_q = 1; B_n \neq 0; q+1 < n).$$

L'équation (26) n'admet qu'un système de caractéristiques, c'est-à-dire le système de caractéristiques multiple d'ordre n

$$x = \text{const.}$$

Lorsque l'équation (26) admet une intégrale de la forme d'Euler, celle-ci doit par suite être une X -intégrale. Si

$$\alpha_0 X^{(m)} + \alpha_1 X^{(m-1)} + \dots + \alpha_m X$$

est une intégrale de l'équation (26), il faut que l'on ait

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0;$$

il en résulte que l'équation (26) n'admet qu'au plus q X -intégrales distinctes. L'intégrale générale de l'équation (26) ne peut par suite jamais être représentée par des intégrales de la forme d'Euler.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (26) admette s X -intégrales distinctes de rang 1 est que les deux équations

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} - \sum_{i=0}^q \frac{\partial A_i}{\partial x} \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$$

admettent s intégrales distinctes communes. La condition nécessaire et suffisante pour cela est obtenue par des différentiations et des éliminations. Si nous différencions la première équation $j + n - q - 1$ fois par rapport à y et la dernière équation $j - 1$ fois par rapport à y et que nous éliminons les $2j + n - q - 1$ quantités

$$\frac{\partial^h \alpha_0}{\partial y^h} \quad (h = q - j + 1, q - j + 2, \dots, n + j - 1)$$

entre les équations obtenues, nous aurons une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{q-j} P_{ij} \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0,$$

les coefficients P_{ij} étant des déterminants d'ordre $2j + n - q$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (26) admette s X -intégrales distinctes de rang 1 est $P_{i, q-i} = 0$ ($i = 0, 1, \dots, s-1$). Si nous supposons $P_{i, q-i} = 0$ ($i = 0, 1, \dots, s-1$), $P_{s, q-s} \neq 0$, nous pourrions mettre l'équation (26) sous la forme

$$\left[\sum_{i=0}^{q-s} M_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-s} N_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right] \sum_{h=0}^s \frac{P_{h, q-s}}{P_{s, q-s}} \frac{\partial^h z}{\partial y^h} = 0,$$

les coefficients M_i , N_i étant des fonctions de x et de y .

Nous désignons toujours la transformation

$$z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0}, \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0,$$

comme une transformation (t_1) . Par cette transformation l'équation (26) est ramenée à l'équation

$$\alpha_0 \bar{B}_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\bar{B}_0} \left(\sum_{i=1}^q \bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} + \sum_{i=1}^n \bar{B}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \right) \frac{z_1}{\alpha_0} \right] + \bar{B}_0 z_1 = 0,$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} \bar{A}_i = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{j=0}^{q-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} A_{i+j} \frac{\partial^j \alpha_0}{\partial y^j}, \\ \bar{B}_i = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} B_{i+j} \frac{\partial^j \alpha_0}{\partial y^j} + \frac{1}{\alpha_0} \sum_{j=0}^{q-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} A_{i+j} \frac{\partial^{j+1} \alpha_0}{\partial x \partial y^j}, \end{cases}$$

pourvu que $\bar{B}_0 \neq 0$. La transformation

$$z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0}, \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^{i+1} \alpha_0}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} \neq 0,$$

appliquée à l'équation (26), conduit ainsi à une équation de même type et de même ordre; les deux équations s'intègrent en même temps; de chaque intégrale de l'une des équations, nous obtiendrons sans intégration une intégrale de l'autre équation. Par la transformation

$$z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{\alpha_0}$$

le rang de la X -intégrale correspondant à α_0 est diminué d'une unité. Si nous appliquons une transformation (t_1) à une équation (26) qui admet les s X -intégrales (29), nous obtiendrons les mêmes résultats que pour l'équation (20) (voir les propositions 4 et 5), et de la même manière. Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que les s X -intégrales (29) de l'équation (26) ne puissent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur à $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ est qu'aucune relation de la forme

$$\sum_{j=1}^s \sum_{i=0}^{m_j} f_{ij}(x) x_{ij} = 0$$

n'existe. Ensuite il en résulte aussi que, lorsque l'équation (26) admet s X -intégrales distinctes (29) qui ne peuvent être remplacées par des X -intégrales de rang inférieur à $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$, l'équation (26) peut être ramenée, à l'aide de $\sum_{i=1}^s (m_i + 1)$ transformations (t_i) , convenablement choisies, à une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^q A_{ih} \frac{\partial^{i+1} z_h}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n B_{ih} \frac{\partial^i z_h}{\partial y^i} = 0, \text{ où } A_{q-s, h} = 1, \quad B_{n-s, h} \neq 0, \\ \left(h = \sum_{i=1}^s (m_i + 1) \right)$$

Mais, si $q > 1$, la transformation (t_1) n'est pas complètement déterminée; α_0 est assujettie à la seule condition

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0,$$

et nous ne pouvons pas d'avance choisir celles des transformations (t_i) par lesquelles l'ordre de l'équation pourra être diminué.

Les transformations $(t_2), (t_3), \dots, (t_q)$ de l'équation (26) sont définies de la même manière que ces transformations de l'équation (20) (voir page 35). La transformation complètement déterminée (t_q)

$$z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}$$

sera aussi notée par la lettre (T_1) . Toutes les transformations (t_i) ($i = 1, 2, \dots, q$) peuvent être considérées comme des transformations de Laplace à l'équation (26).

La transformation complètement déterminée de Laplace (T_1) , appliquée à l'équation (26), conduit à une équation de même type et de même ordre au plus. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation obtenue soit d'ordre $n - s$ est que l'équation (26) admette s , et pas plus de s , X -intégrales distinctes de rang 1. Si nous appliquons la transformation (T_1) à une équation (26) qui admet les s X -intégrales (29), nous obtiendrons les mêmes résultats que pour l'équation (20)

(voir les propositions 6 et 7); la transformation (T_1) diminue ainsi le rang de chaque X -intégrale d'une unité.

L'équation donnée (26) est notée par la lettre (E) . Si nous appliquons la transformation complètement déterminée (T_1) plusieurs fois de suite, nous obtiendrons une série d'équations de même type et d'ordre n au plus, qui sont notées par (E_1) , (E_2) , (E_3) etc.; dans cette série, chaque équation suivante est au plus de même ordre que l'équation précédente.

En appliquant la transformation (T_1) plusieurs fois de suite à l'équation (E) nous pouvons reconnaître si l'équation (E) admet de X -intégrale. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (E) admette s X -intégrales distinctes de rang inférieur à $m + 2$, est que l'équation (E_{m+1}) soit d'ordre $n - s$. Les X -intégrales de l'équation (26) sont obtenues de la même manière que les X -intégrales de l'équation (20). Pour obtenir les X -intégrales de l'équation (26), il ne faut que l'intégration d'équations différentielles linéaires, de règle, du premier ordre, dans des cas spéciaux, d'ordre supérieur. Pour chaque X -intégrale obtenue de l'équation (26), l'ordre de l'équation peut être diminué d'une unité.

Les résultats obtenus jusqu'ici pour l'équation (26) sont identiques aux résultats correspondants, obtenus pour l'équation (20).

La transformation inverse à la transformation

$$z_1 = \alpha_0 \frac{\partial z}{\partial y \frac{\partial}{\partial x}}, \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^n A_i \frac{\partial^i z_0}{\partial y^i} = 0,$$

est

$$z = -\frac{\alpha_0}{B_0} \left(\sum_{i=1}^q \bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} + \sum_{i=1}^n \bar{B}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \right) \frac{z_1}{\alpha_0}.$$

L'équation (26) peut s'écrire

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[\gamma \left(\sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-1} S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \right] + Tz = 0 \quad [R_{q-1} = 1; S_{n-1} \neq 0; T \neq 0],$$

R_i , S_i , T , γ étant des fonctions de x et de y , si l'équation adjointe (28)

$$\sum_{i=0}^q (-1)^{i+1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_i u) + \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial y^i} (B_i u) = 0$$

n'admet pas q X -intégrales distinctes de rang 1. La transformation (t_{-1})

$$z_{-1} = \sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-1} S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}$$

est, à un facteur près qui est une fonction déterminée de x et de y , inverse à une transformation (t_1) .

Les transformations (t_{-j}) ($j = 1, 2 \dots q$) peuvent être définies de la même manière dont ont été définies les transformations en question de l'équation (20)

(voir page 48), c'est-à-dire comme les transformations inverses, à un facteur près, aux transformations (t_j) . La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (26) admette une transformation (t_{-j}) est que l'équation adjointe (28) admette au plus $q - j$ X -intégrales distinctes de rang 1. Écrivons

$$\mathcal{E}_k(z) \equiv \sum_{i=k}^q (-1)^{q-i} \frac{\partial^{i+1-k}}{\partial x \partial y^i} (C_i z) - \sum_{i=k}^n (-1)^{q-i} \frac{\partial^{i-k}}{\partial y^{i-k}} (D_i z) \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

les coefficients C_i, D_i étant définis par l'identité

$$(-1)^q \left[\sum_{i=0}^q (-1)^i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_i u) - \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial y^i} (B_i u) \right] \equiv \sum_{i=0}^q C_i \frac{\partial^{i+1} u}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n D_i \frac{\partial^i u}{\partial y^i}.$$

Une transformation (t_{-j}) est de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-1} U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \equiv \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{E}_i(z);$$

les coefficients T_i vérifient les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations

$$\sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$$

admettent $q - j$ intégrales distinctes en commun, et, de plus, les coefficients c_i satisfont à $n - q + j - 1$ relations linéaires et homogènes; ces dernières relations peuvent s'écrire

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{q+h} (-1)^i \left[c_{i+1} \sum_{k=0}^h \frac{h}{k! (h-k)!} C_{i+k-h}^{(k)} \right] = 0 & (h = 0, 1, \dots, n - q - 1), \\ \sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i c_{i+1} Q_{ih} = 0 & (h = 1, 2, \dots, j - 1), \end{cases}$$

pourvu que $Q_{q-i, i} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, j - 2$); dans le cas où

$$Q_{q-i, i} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s - 1, s + 1, \dots, j - 2), \quad Q_{q-s, s} = 0, \quad (s \leq j - 2)$$

la relation

$$\sum_{i=0}^{q-s} (-1)^i c_{i+1} (Q_{i-1, s} + Q'_{is}) = 0$$

y est ajoutée etc., tout à fait comme pour l'équation (20). Dans ces formules la désignation $C_i^{(k)} = \frac{\partial^k C_i}{\partial y^k}$ est employée, et Q_{ih} ont été formés des coefficients de l'équation (28) de la même manière dont P_{ih} ont été formés des coefficients de l'équation (26). Les relations en question sont obtenues de la même manière, à peu près, que les relations (56') et (56''). La transformation (t_{-q}) , aussi désignée (T_{-1}) , est par là complètement déterminée, à un facteur près.

Nous trouvons de la même manière que pour l'équation (20) (voir proposition 9) que, si l'équation (26) est ramenée à une équation de même ordre par une transformation (t_j) [(t_{-j})], il existe aussi une transformation (t_j) [(t_{-j}) respectivement],

par laquelle l'adjointe de cette équation est ramenée à l'équation (28); cette proposition est valable pour $j = 1, 2, \dots, q$. Les transformations (t_{-j}) ($j = 1, 2, \dots, q$) ont été définies comme inverses aux transformations (t_j) ($j = 1, 2, \dots, q$). Pour l'équation (20) nous pourrions aussi définir la transformation (t_{-j}) ($q \geq j \geq 1$) en partant directement de son caractère d'être une transformation de Laplace. Pour l'équation (26) cette définition de la transformation (t_{-j}) ($q \geq j \geq 1$) est hors de question, car la transformation (t_{-j}) n'est pas une transformation de Laplace à l'équation (26). Nous ne pourrions non plus obtenir une intégrale de la forme d'Euler de l'équation (26) en appliquant les transformations (t_{-j}) ($j = 1, 2, \dots, q$). Les transformations en question peuvent cependant être d'intérêt: Si l'équation adjointe (28) admet une X -intégrale de rang $m + 1$, nous obtiendrons en appliquant la transformation complètement déterminée (T_{-1}) m fois de suite une équation de la forme

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[\gamma \left(\sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-1} S_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) Z \right] = 0 \quad (R_{q-1} = 1; \quad S_{n-1} \neq 0),$$

dont l'ordre peut être directement diminué d'une unité; et si l'équation adjointe (28) admet s X -intégrales distinctes, nous pourrions de même ramener l'intégration de l'équation (26) à l'intégration d'une équation du même type et d'ordre $n - s$; il faut pourtant remarquer que le second membre de la dernière équation est une fonction linéaire de s fonctions arbitraires de x et de ses dérivées.

L'intégration de l'équation (26) ne peut jamais être ramenée à l'intégration d'équations différentielles linéaires par la méthode de Laplace. En appliquant les transformations (T_1) et (T_{-1}) nous pourrions diminuer l'ordre de l'équation (26) de q unités au plus, et l'intégration de l'équation pourra être ramenée à l'intégration d'une équation de la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{i=0}^q b_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0 \quad (b_{n-q} \neq 0),$$

les coefficients b_i étant des fonctions de x et de y .

De même que pour l'équation (20), nous trouverons que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (26) admette une X -intégrale de rang $m + 1$ correspondant à α_0 , est que l'équation adjointe (28) admette une intégrale intermédiaire de la forme

$$\sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{i+j} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} (\lambda_{i,j+1} u) = X,$$

où $\lambda_{m+1,q} = \alpha_0$ et où $\lambda_{m+1,i} = 0$ pour $i > q$. Si l'intégrale intermédiaire de l'équation (28) est donnée, nous obtiendrons la X -intégrale de l'équation (26) sans intégration; et inversement.

En effectuant la substitution $z = \lambda \bar{z}$, l'équation (26) s'écrit

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^{i+1} \bar{z}}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial^i \bar{z}}{\partial y^i} = 0.$$

où

$$\begin{cases} \bar{A}_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{q-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} A_{i+j} \frac{\partial^j \lambda}{\partial y^j}, \\ \bar{B}_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} B_{i+j} \frac{\partial^j \lambda}{\partial y^j} + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{q-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} A_{i+j} \frac{\partial^{j+1} \lambda}{\partial x \partial y^j}. \end{cases}$$

Les fonctions des coefficients de l'équation (26) qui ne changent pas pour la substitution $z = \lambda \bar{z}$ peuvent être obtenues de la manière suivante. Écrivons

$$I_i = \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{q-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} A_{i+j} \frac{\partial^j \nu}{\partial y^j} \quad (i = 0, 1, \dots, q-2), \quad \text{où} \quad \frac{\partial \log \nu}{\partial y} = -\frac{1}{q} A_{q-1},$$

$$H_i = \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} B_{i+j} \frac{\partial^j \nu}{\partial y^j} \quad (i = q, q+1, \dots, n), \quad \text{où} \quad \frac{\partial \log \nu}{\partial y} = -\frac{1}{q} A_{q-1}.$$

$$I_{q-1} = \frac{\partial A_{q-1}}{\partial x} - q \frac{\partial H_q}{\partial y}.$$

Les q fonctions I_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$) et les $n-q$ fonctions H_i ($i = q+1, q+2, \dots, n$) ne changent pas pour la substitution $z = \lambda \bar{z}$. Écrivons ensuite

$$H_i = \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{q-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} \left(\frac{\partial A_{i+j}}{\partial x} + A_{i+j} H_q \right) \frac{\partial^j \nu}{\partial y^j} - \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} B_{i+j} \frac{\partial^j \nu}{\partial y^j} \quad (i = 0, 1, \dots, q-1),$$

$$\text{où} \quad \frac{\partial \log \nu}{\partial y} = -\frac{1}{q} A_{q-1}.$$

Les q quantités H_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$) ne changent pas non plus pour la substitution $z = \lambda \bar{z}$. Lorsque $A_{q-1} = 0$, nous obtiendrons

$$I_{q-1} = -q \frac{\partial B_q}{\partial y}, \quad I_i = A_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-2),$$

$$H_i = B_i \quad (i = q+1, q+2, \dots, n), \quad H_i = \frac{\partial A_i}{\partial x} + A_i B_q - B_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1).$$

Il en résulte que deux équations de la forme (26) qui ont les mêmes valeurs des $n+q$ invariants

$$I_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1), \quad H_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1, q+1, \dots, n)$$

peuvent se ramener l'une à l'autre par une substitution de la forme $z = \lambda \bar{z}$. Et tout invariant de l'équation (26) est ainsi une fonction des $n+q$ invariants

$$I_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1), \quad H_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1, q+1, \dots, n).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (26) admette s X-intégrales distinctes de rang 1 est que les deux équations

$$\frac{\partial^q \alpha}{\partial y^q} + \sum_{i=0}^{q-2} I_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=q+1}^n H_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} + \sum_{i=0}^{q-1} H_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0.$$

admettent s intégrales distinctes communes. Nous obtiendrons de cette manière les conditions que les invariants doivent vérifier pour que l'équation admette s X -intégrales distinctes de rang 1. — Je n'ai pas encore examiné les relations qu'il y a entre les invariants de l'équation (26) et ceux de l'équation (E_1).

Le critérium de Goursat est valable sans changement pour l'équation (26) et se prouve de la même manière que pour l'équation (20).

Les résultats des chapitres III et IV ne peuvent naturellement pas être étendus à l'équation (26).

Par ces recherches, j'ai généralisé quelques-uns des résultats les plus importants obtenus par Darboux pour l'équation (1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial y} + b \frac{\partial z}{\partial x} + cz = 0.$$

J'ai montré que ces résultats sont essentiellement valables aussi bien pour l'équation (19)

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{0i} \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n A_{1i} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0.$$

Mes recherches peuvent sans doute être complétées à plusieurs points; comme je l'ai indiqué de temps en temps au cours de ce travail.

Il ne serait pas sans intérêt d'appliquer les résultats obtenus ici à quelques équations peu compliquées du type considéré pour les soumettre à un examen plus approfondi. Je pense aux équations qui sont identiques à leur équation adjointe; pour le cas où $n=2$, elles ont été étudiées par Moutard¹⁾ et, plus tard, par Darboux²⁾. Je pense aussi aux équations de la forme

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{(x-y)^{n-i-1}} \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{(x-y)^{n-i}} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0 \quad (a_{n-1} = 1),$$

où a_i , b_i sont des constantes; pour le cas où $n=2$ examinées par Darboux³⁾.

Il y a plus d'un problème d'intérêt pour l'application de la méthode de Laplace à l'équation (19)

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{0i} \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n A_{1i} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0$$

que je n'ai point discutés dans cette thèse. Surtout il aurait intérêt à comparer les méthodes de Darboux et de Laplace, à examiner si l'application des deux

¹⁾ Journal de l'École Polytechnique. Cahier 45, 1878.

²⁾ DARBOUX, Leçons. Partie II, Livre IV, Chap. VII.

³⁾ DARBOUX, Leçons. Partie II, Livre IV, Chap. III.

méthodes amènerait les mêmes résultats pour les mêmes équations de la forme (19). La question de savoir à quel point l'intégration de l'équation (19) peut être simplifiée par la méthode de Darboux est d'importance pour l'équation générale

$$F \left(\frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}}, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x \partial y^{n-2}}, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y \right) = 0;$$

celle-ci étant intégrable par la méthode de Darboux en même temps que l'équation auxiliaire

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p_{1, n-1}} \frac{\partial^n z'}{\partial x \partial y^{n-1}} + \frac{\partial F}{\partial p_{0n}} \frac{\partial^n z'}{\partial y^n} + \frac{\partial F}{\partial p_{1, n-2}} \frac{\partial^{n-1} z'}{\partial x \partial y^{n-2}} + \frac{\partial F}{\partial p_{0, n-1}} \frac{\partial^{n-1} z'}{\partial y^{n-1}} + \dots \\ + \frac{\partial F}{\partial p_{10}} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p_{01}} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} z' = 0, \end{aligned}$$

la désignation $p_{ij} = \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j}$ étant employée; et la dernière équation est de la forme (19), lorsque z' est considérée comme la variable dépendante.



Errata.

Page 72, ligne 3 d'en bas, au lieu de $(i = 0, 1, \dots, q-1)$ lisez $(i = 0, 1, \dots, q-2)$ et ajoutez $H_{q-1} - K_{q-1} = I_{q-1}$.

Page 127, ligne 8 d'en bas, au lieu de (20) lisez (23) de l'intégrale générale de l'équation (20).

